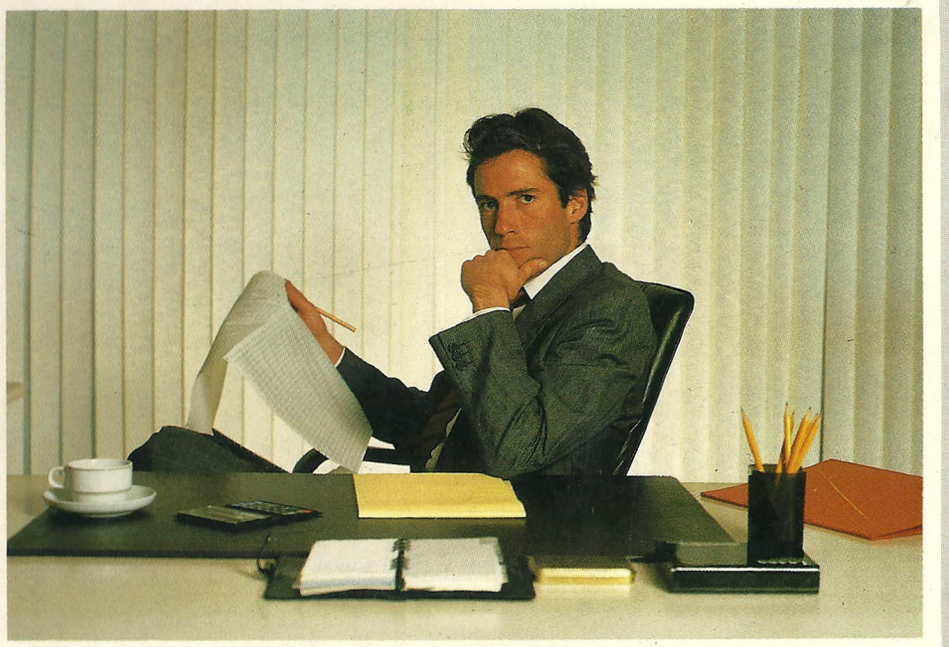
Dentro da bibliografia em matemática financeira, este livro é inovador, no sentido de que os conceitos de matemática financeira nele contidos são apresentados de maneira simples e objetiva, com ênfase a sua aplicação às principais modalidades de operações de investimento realizadas no Sistema Financeiro Nacional e com utilização da calculadora HP12C, constituindo-se, assim, em uma ferramenta de trabalho para executivos e profissionais do mercado financeiro.

1464047CA
Matemática Finance
Emílio Volz Farias
2R234
9 "788585"279271"

ORTIZ
Tecnologia gerencial modernizando o Brasil

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA EXECUTIVOS

Aplicada às operações do mercado financeiro, com utilização da calculadora HP12C



Emílio E. Volz Farias

ORTIZ

2ª EDIÇÃ

Movimentar-se com desenvoltura e de forma bem-sucedida pelas intrincadas operações do dia a dia do mercado financeiro exige, dos executivos e profissionais nele inseridos, uma gama de conhecimentos que ultrapassa a mera teoria da matemática financeira.

Com um público alvo composto por esses executivos e profissionais — bem como por estudantes universitários e interessados no mercado financeiro — , este livro apresenta, de maneira simples e objetiva, os já amplamente conhecidos conceitos de matemática financeira, porém dando ênfase a sua aplicação prática, no mercado, bem como à utilização da calculadora HP12C. Ao final de cada capítulo, já ilustrado com vários exemplos de procedimentos e cálculos, há exercícios de fixação, com resposta.

Além disso, os conceitos contidos no livro estão atualizados de acordo com as últimas determinações da autoridade competente, e é feita uma abordagem inédita, através do conceito de valor atual de um capital, de equivalência de capitais, valor atual de um fluxo de caixa, equivalência de fluxos de caixa, taxa interna de retorno de um fluxo de caixa e séries de pagamentos e recebimentos.

A obra conta, ainda, com um apêndice, especialmente dedicado ao uso da calculadora HP12C.

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA EXECUTIVOS

EDITORA ORTIZ S.A. EDITORA ORTIZ S.A. EDITORA ORTIZ S.A. EDITORA ORTIZ S.A. EDITORA ORTIZ S.A. EDITORA ORTIZ S.A.

EDITORA ORTIZ S/A
Av. Júlio de Castilhos, 159 - 8º andar
Fone/Fax (051) 225-3026
90030-131 - Porto Alegre (RS)

Editor
Airton Ortiz

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA EXECUTIVOS

Aplicada às operações do mercado financeiro, com utilização da calculadora HP12C

Emílio E. Volz Farias

IMPRESSÃO
ESPAÇO·CULTURAL
LIVROS·REVISTAS IMPORTADAS
GOETHE, 38 - LOJA 10
W.ESCOBAR, 2933 - LOJA 202
611

ORTIZ

Supervisão gráfica: *Rogerio Vargas*
Capa: *Camaleoa Istúdio/Vera Junqueira*
Impressão: *Pallotti*

FICHA CATALOGRÁFICA
(reprodução reduzida da ficha 7.5 x 12.5 cm)

F224m Farias, Emílio E. Volz
Matemática financeira para executivos: Aplicada às operações do mercado financeiro, com utilização da calculadora HP12C / Emílio E. Volz Farias. - 2. ed. - Porto Alegre: Ortiz, 1993.

1. Finanças 2. Economia 3. Administração Financeira 4. Matemática Financeira I Título.

ISBN 85-85279-27-3 CDU 336.6

(Bibliotecária responsável: Rosa Lúcia Vieira Maidana CRB 10/872)

Índice para catálogo sistemático:

1. Finanças: Economia - 336
2. Administração Financeira - 336.07
3. Matemática Financeira - 336.6

EDITORA EXECUTIVA
Vânia Conde

© Emílio E. Volz Farias
Todos os direitos estão reservados à Editora Ortiz S/A.

2ª edição revista e ampliada impressa em maio de 1993.

Sumário

Prefácio 9

Capítulo 1

Sistema de juros simples 11
1.1 Conceitos básicos 11
1.2 Capitalização simples 12
1.3 Montante 13
1.4 Fórmulas derivadas 16
1.5 Exemplos 17
1.6 Aplicações do regime de juros simples 19
1.7 Utilização da calculadora HP12C 25
1.8 Exercícios de fixação 28

Capítulo 2

Sistema de juros compostos 31
2.1 Capitalização composta 31
2.2 Montante 32
2.3 Fórmulas derivadas 35
2.4 Exemplos 36
2.5 Utilização da calculadora HP12C 39
2.6 Exercícios de fixação 48

Capítulo 3

Juros simples x juros compostos 51

Capítulo 4

Taxas de juros e equivalência de taxas 54
4.1 Introdução 54
4.2 Taxa simples ou linear 54
4.3 Taxa composta ou exponencial 55
4.4 Taxa nominal 55
4.5 Taxa efetiva 56
4.6 Taxas proporcionais 57
4.7 Taxas equivalentes 59
4.8 Taxa real 71
4.9 Ganho acima da Taxa Referencial Diária Acumulada (TRDA) 73
4.10 Utilização da calculadora HP12C 74
4.11 Exercícios de fixação 81

Capítulo 5

Desconto 85
5.1 Introdução 85
5.2 Desconto "por fora" 87
5.3 Cálculo de taxa efetiva ou composta de uma operação de desconto bancário simples 90
5.4 Taxa média e prazo médio para operações de desconto bancário simples 101
5.5 Utilização da calculadora HP12C 110
5.6 Exercícios de fixação 118

Capítulo 6

Fluxos de caixa 121
6.1 Conceito de fluxo de caixa 121
6.2 Valor atual de um capital 122
6.3 Equivalência de capitais 124
6.4 Valor atual de um fluxo de caixa 126
6.5 Equivalência de fluxos de caixa 128
6.6 Utilização prática do conceito de fluxo de caixa 131
6.7 Taxa interna de retorno de um fluxo de caixa 134
6.8 Utilização da calculadora HP12C 137
6.9 Exercícios de fixação 153

Capítulo 7

Série de pagamentos ou recebimentos 161
7.1 Definição e classificação 161
7.2 Dedução da fórmula do montante S de uma série postecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos 163
7.3 Dedução da fórmula do valor atual P de uma série postecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos 167
7.4 Dedução da fórmula do montante S de uma série antecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos 173
7.5 Dedução do valor atual P de uma série antecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e uma determinada taxa i de juros compostos 177
7.6 Observações 183
7.7 Utilização da calculadora HP12C 186
7.8 Exercícios de fixação 194

Capítulo 8

Aplicação às operações do mercado financeiro 199
8.1 Taxa Referencial de Juros (TR) 199
8.2 Cálculo do Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) sobre operações de curto prazo 201
8.3 Open market 203
8.4 Títulos de renda fixa 207
8.5 Poupança 213
8.6 Fundos mútuos 216
8.7 Ouro 227
8.8 Cálculo da rentabilidade dos fundos 230

8.9 Spread 238
8.10 Risco de descasamento 246
8.11 Comparação entre taxas de investimento 249
8.12 Exercícios de fixação 251

Apêndice

Introdução ao uso da calculadora HP12C 256
1. Informações básicas 256
2. Pilha operacional 258
3. Cálculos em cadeia 260
4. Registradores de armazenamento 262
5. Aritmética com registradores de armazenamento 263
6. Funções de porcentagem 264
7. Funções de calendário 267

Bibliografia 271

Prefácio

Este livro é fruto de um trabalho de cinco anos, com base na experiência acumulada ministrando cursos em instituições financeiras como o Citibank, Lloyds Bank, Multiplic, Banco Francês e Brasileiro, de minha atividade docente em nível de graduação e pós-graduação junto à Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Unisinos) e Faculdade Feevale, e de minha experiência profissional no mercado financeiro.

A idéia central é apresentar os conceitos de matemática financeira de maneira simples, didática e objetiva, dando ênfase à aplicação prática dos referidos conceitos, bem como da utilização da calculadora HP12C.

Entre as novidades apresentadas no livro podemos destacar:

- Cada capítulo apresenta a aplicação prática, às operações do mercado financeiro, dos conceitos vertidos.

- Os conceitos apresentados estão atualizados de acordo com as últimas determinações da autoridade competente.

- Ao final do capítulo é enfatizada a utilização da HP12C daquele conteúdo específico.

- No capítulo 8 apresentamos as principais modalidades de operações de investimento realizadas no Sistema Financeiro Nacional, atualizadas de acordo com as últimas medidas, com ênfase na utilização da HP12C.

- Apresentamos uma abordagem inédita, através do conceito de valor atual de um capital, dos seguintes tópicos:

- Equivalência de capitais

- Valor atual de um fluxo de caixa

- Equivalência de fluxos de caixa

- Taxa interna de retorno de um fluxo de caixa

- Série de pagamentos ou recebimentos

O público alvo pode ser encontrado nos seguintes grupos:

- Estudantes universitários das disciplinas Matemática Financeira e Mercado de Capitais.

- Programas de formação de executivos para o mercado financeiro.

- Técnicos e interessados no mercado financeiro.

- Interessados em conhecer as aplicações da HP12C ao dia-a-dia do Sistema Financeiro.

Este trabalho prevê o desenvolvimento futuro de alguns assuntos, como Sistemas de Amortização, usando o conceito de valor atual de um capital, bem como uma abordagem das operações de empréstimos, financiamento e repasses.

zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

CAPÍTULO 1

Sistema de juros simples

1.1 Conceitos básicos

JURO — J — É a remuneração do capital empregado, podendo ser entendido como o aluguel pago pelo uso do dinheiro.

CAPITAL — Qualquer valor expresso em moeda disponível em determinada época.

PRINCIPAL — P — Capital inicialmente empregado. Valor em moeda disponível no período inicial (n = 0).

n — Número de períodos em que o tempo foi dividido. Na matemática financeira trabalhamos com mês de trinta dias e ano de 360 dias.

TAXA DE JUROS — i — É a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no fim de um determinado período de tempo e o capital inicialmente empregado. A taxa está sempre relacionada com uma unidade de tempo. É o juro de uma unidade monetária durante um período.

$$i = \frac{J}{P}$$

MONTANTE — S — Por definição, é obtido pela adição do principal aos juros.

$$S = P + J$$

Ao se dispor a emprestar seu dinheiro, o detentor do capital deve atentar para os seguintes fatores:

- **RISCO:** Probabilidade de não resgatar o dinheiro.
- **DESPESAS:** Despesas operacionais, contratuais e tributárias.
- **INFLAÇÃO:** Perda do poder aquisitivo da moeda.
- **GANHO:** Fixado em função das demais oportunidades de investimento.

1.2 Capitalização simples

Capitalização simples é aquela em que a taxa de juros, no final de cada um dos períodos de capitalização, incide somente sobre o principal.

Para exemplificar, suponhamos um investidor que possui Cr$ 1.000,00 para aplicar pelo período de quatro meses em uma aplicação que remunera à taxa i = 10,00%/a.m.

TABELA 1

PERÍODO	SALDO INICIAL	JUROS (P x i)	SALDO FINAL
0	-	-	1.000,00
1	1.000,00	100,00	1.100,00
2	1.100,00	100,00	1.200,00
3	1.200,00	100,00	1.300,00
4	1.300,00	100,00	1.400,00

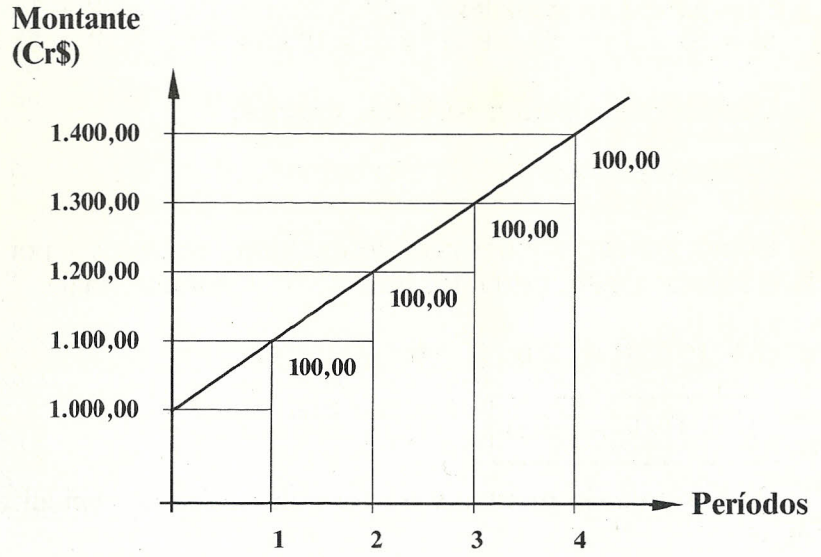
Se observarmos a coluna do saldo final, que nos dá o montante ao final de cada um dos períodos, veremos que cresce de modo que cada valor é igual ao anterior, somado de um valor constante, 100,00 (P x i). Este aspecto é de fundamental importância, pois é a própria definição de uma progressão aritmética de razão P x i, e associada com ela temos uma linearidade que é transferida para a capitalização simples.

Essa linearidade tem uma série de efeitos práticos, como o fato da taxa mensal ser igual à diária multiplicada por trinta, ou dos juros mensais serem iguais aos trimestrais divididos por três. Em outras palavras, traduz-se na validade da regra de três simples no regime de capitalização simples.

1.3 Montante

1.3.1 Representação gráfica

Usando os dados da tabela 1, podemos construir um gráfico que mostra a evolução do montante.



A representação gráfica é uma reta, conseqüência do crescimento em progressão aritmética ao longo do tempo.

1.3.2 Dedução da fórmula

Sabemos que o montante, por definição, é dado pela seguinte expressão:

$$S = P + J$$

Sendo o regime de capitalização simples aquele no qual ao final de cada um dos períodos de capitalização a taxa de juros incide somente sobre o principal, temos como conseqüência que os juros de todos os períodos são iguais a P x i.

Assim sendo, o montante ao final do primeiro período será:

$$S1 = P + J = P + P \times i$$

Ao final dos demais períodos teremos:

$$S2 = S1 + J = S1 + P \times i = P + P \times i + P \times i = P + 2 \times p \times i$$
$$S3 = S2 + J = S2 + P \times i = P + 2P \times i + P \times i = P + 3 \times p \times i$$
$$S4 = S3 + J = S3 + P \times i = P + 3P \times i + P \times i = P + 4 \times P \times i$$

Generalizando para n períodos, teremos:

$$Sn = P + n \times P \times i$$

Como, porém, n é um período qualquer, podemos supor que seja o último, sendo, portanto, Sn = S = montante final.

$$S = P + P \times i \times n \quad \text{ou}$$

$$\boxed{S = P(1 + i \times n)} \quad (1)$$

(1) Fórmula do montante ou fórmula básica de capitalização simples.

Outra maneira de se chegar a essa expressão é a partir do fato do montante crescer de acordo com uma progressão aritmética. De acordo com a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, temos:

$$an = a1 + (n - 1)\, r$$

Sendo:

an = Último termo
a1 = Primeiro termo
r = Razão

Em nosso caso: a1 = S1 e an = Sn

$$Sn = S1 + (n - 1)\, r$$

Lembrando:

$$S1 = P(1 + i)$$
$$r = P \times i$$

Temos:

$$Sn = P(1 + i) + (n - 1)\, P \times i$$
$$Sn = P + P \times i + (n - 1)\, P \times i = P + n \times P \times i$$
$$Sn = P(1 + n \times i)$$

Como, porém, n é um período qualquer, podemos supor que seja o último, sendo, portanto, Sn = S = montante final.

$$S = P(1 + i \times n)$$

O cuidado que se deve ter com o uso da fórmula é expressar a unidade de tempo dos períodos de capitalização na mesma unidade de tempo da taxa de juros. Em outras palavras, se expressamos o período em dias, a taxa deve ser expressa em dias; se a unidade de tempo da taxa é mês, o período deve ser expresso em meses, e assim por diante.

As taxas de juros são geralmente citadas em forma percentual, mas é preciso lembrar que sua aplicação em fórmulas deve ser sob a forma de fração decimal.

1.4 Fórmulas derivadas

Na capitalização simples possuímos as seguintes variáveis: S, P, i e n, e, conhecendo três delas, podemos determinar a quarta. A fórmula (1) nos permite determinar S a partir de P, i e n e a partir dela podemos encontrar fórmulas para calcular as outras variáveis.

Através da definição de S, $S = P + J$, podemos encontrar uma expressão que nos permite calcular J em função de P, i e n.

$$S = P + J \quad J = S - P$$

Usando a expressão (1), temos:

$$J = P(1 + i \times n) - P = P + P \times i \times n - P$$

Simplificando, obtemos:

$$\boxed{J = P \times i \times n} \qquad (2)$$

• Determinação do principal:

$$\boxed{P = \frac{S}{(1 + i \times n)}} \qquad (3)$$

• Determinação da taxa de juros:

$$\boxed{i = \frac{S - P}{P \times n} = \frac{J}{P \times n}} \qquad (4)$$

• Determinação do período:

$$\boxed{n = \frac{S - P}{P \times i} = \frac{J}{P \times i}} \qquad (5)$$

1.5 Exemplos

1. Uma pessoa aplica Cr$ 1.000,00 a uma taxa de juros linear de 6,00% a.m. pelo período de quatro meses. Qual é o montante?

Dados:

P = 1.000,00
n = 4 meses
i = 6,00% ao mês
S = ?

$$S = P(1 + i \times n) = 1.000,00\ (1 + 0,06 \times 4) = 1.240,00$$

2. Quais são o valor dos juros e o montante a ser pago correspondentes a um empréstimo de Cr$ 2.000,00, sendo a taxa de 15,00% a.m., e o período, de 93 dias?

Dados:

P = 2.000,00
n = 93 dias ou 93/30 meses
i = 15,00% a.m.
J = $P \times i \times n$ = 2.000,00 x 0,15 x 93/30 = 930,00
S = ?

$$S = P + J = 2.000,00 + 930,00 = 2.930,00$$

3. Foram aplicados Cr$ 800,00 por 188 dias, que renderam Cr$ 100,00. Quais as taxas de juros mensal e anual?

Dados:

P = 800,00
J = 100,00
n = 188 dias ou 188/30 meses
i = ?

$$i = \frac{J}{P \times n} = \frac{100,00}{800,00 \times \frac{188}{30}} = 0,0199 \text{ ao mês ou } 1,99\% \text{ ao mês}$$

$i = 0,0199 \times 12 = 0,2388$ ao ano ou 23,88% ao ano

4. Em que prazo uma aplicação de Cr$ 300,00 gera um montante de Cr$ 338,00, considerando-se uma taxa de 30,00% ao trimestre?

Dados:

P = 300,00
S = 338,00
i = 30,00% ao trimestre
n = ?

$$n = \frac{S - P}{P \times i} = \frac{338,00 - 300,00}{300,00 \times 0,30} = 0,42222 \text{ trimestre}$$

1.6 Aplicações do regime de juros simples

1.6.1 Método Hamburguês

Esse método é usado pelos bancos para o cálculo dos juros incidentes sobre os saldos devedores em conta corrente ou os excessos em relação aos "cheques especiais" ou "contas garantidas", sendo uma das aplicações da capitalização simples no nosso dia a dia. Neste caso temos diversos saldos devedores, utilizados por diversos prazos, que serão remunerados a uma taxa única diária. Os bancos geralmente fornecem a taxa linear mês, e a partir dela obtemos a taxa diária a ser usada nos cálculos.

Para obter a expressão genérica, vamos supor um correntista que teve os seguintes saldos devedores ao longo do mês:

- Saldo devedor P1, pelo período de n1 dias
- Saldo devedor P2, pelo período de n2 dias
  " "
  " "
- Saldo devedor PK, pelo período de nk dias.

Vamos determinar os juros totais, JT, que o correntista deve pagar ao final do mês.

Lembrando a expressão (2), temos $J = P \times i \times n$, e aplicando neste caso, sendo id = taxa diária, temos:

$$JT = P1 \times n1 \times id + P2 \times n2 \times id + \ldots + Pk \times nk \times id$$

Como a taxa diária é um fator comum em todas as parcelas, podemos colocar id em evidência:

$JT = id\ (P1 \times n1 + P2 \times n2 + \ldots + Pk \times nk)$, ou, usando o conceito de somatório,

$$JT = id \times \sum_{r=1}^{k} Pr \times nr \qquad (6)$$

Mediante um exemplo ilustraremos a aplicabilidade desse método. Seja o indicado a seguir o extrato de um cliente durante um dado mês.

D - Saldo devedor
C - Saldo credor

DATA	LANÇAMENTO DÉBITO/CRÉDITO	SALDO (P)	Nº DE DIAS (n)	Nº DE DIAS x SALDO DEVEDOR Pr x nr
03		1.000,00 C	-	-
04	5.000,00 D	4.000,00 D	6	24.000,00
10	10.000,00 D	14.000,00 D	10	140.000,00
20	9.000,00 C	5.000,00 D	5	25.000,00
25	5.000,00 D	10.000,00 D	5	50.000,00
30	20.000,00 C	10.000,00 C	-	-
			TOTAL	239.000,00

$$TOTAL = \sum_{r=1}^{k} Pr \times nr = 239.000,00$$

Calcular o valor dos juros incidentes sobre os saldos devedores do cliente, se o banco está usando uma taxa de juros de 36,00% ao mês.

Usando a expressão (6), temos:

$$JT = id \times \sum_{r=1}^{k} Pr \times nr$$

$$id = \frac{\text{i ao mês}}{30} = \frac{0,36}{30} = 0,0120 \text{ ao dia}$$

$$JT = 0,012 \times 239.000,00 = 2.868,00$$

O valor dos juros a serem pagos pelo correntista é de Cr$ 2.868,00.

Cabe salientar que, se os bancos decidissem remunerar os saldos credores de seus correntistas a uma determinada taxa de juros constante ao mês, o procedimento de cálculo seria análogo ao já descrito, só que nesse caso seriam considerados somente os saldos credores.

1.6.2 Cálculo das operações de open market

No mercado financeiro existem operações que são feitas por um curto período de tempo, geralmente quando a liquidez é um fator preponderante para o investidor.

O overnight é uma aplicação feita pelo prazo de um dia e, entre as operações do mercado financeiro, é a que oferece maior liquidez. Com a edição do Plano Collor II a partir de fevereiro de 1991, deixou de existir como operação no mercado financeiro brasileiro, mas, como as condições do mesmo são muito cambiantes,

vamos deixar o desenvolvimento do cálculo deste tipo de operação. As operações de open são feitas por um prazo maior que um dia, geralmente sete ou mais dias.

O mecanismo de funcionamento é simples: uma instituição adquire uma carteira de títulos públicos ou privados, pagando uma parte com recursos próprios, e buscando a parcela restante no mercado financeiro, tomando dinheiro dos investidores, que são remunerados de acordo com uma taxa balizada pela liquidez do mercado.

Há duas modalidades básicas de overnight: operações lastreadas em títulos da dívida pública — Bônus do Banco Central (BBCs), Letras Financeiras do Tesouro (LFTs) ou Letras do Tesouro Nacional (LTNs), conhecidas como over selic — e operações lastreadas em títulos privados (CDBs), chamadas over ADM, provenientes de cheques administrativos ou cheque emitido pelo próprio banco.

As operações do over selic são assim denominadas porque devem ser registradas diariamente no Serviço Especial de Liquidação e Custódia (uma espécie de caixa de liquidação). Por isso, devem ser feitas em reserva, enquanto que as operações no ADM podem ser em cheque.

A taxa de remuneração das operações é expressa em termos de taxa mês, sendo usado o regime de capitalização simples, por sua facilidade de cálculo.

As alíquotas de tributação das operações, no nosso mercado financeiro, alteram-se muito rapidamente. Devido a isso, vamos nos referir às alíquotas que seriam vigentes no momento e deixar o desenvolvimento genérico, caso no futuro elas venham a ser alteradas.

A alíquota de tributação incidente nessas operações é de 30,00% de imposto federal, mais 5,00% de imposto estadual, incidindo sobre os 30,00% do imposto federal.

Essas duas alíquotas perfazem um total de 31,50%, que incide sobre o ganho real, sendo entendido este como ganho acima da Unidade Fiscal de Referência (UFIR), instituída a partir de janeiro de 1992.

Relembrando a fórmula, temos:

$$S = P (1 + i \times n)$$
$$J = P \times i \times n$$

Exemplo 1

Uma empresa está aplicando Cr$ 100.000,00 no overnight e obtém uma taxa de 29,00% a.m. Calcular o montante líquido, sabendo que a variação da UFIR foi de 0,27% no dia.

• **Montante bruto** — Sb

$$Sb = P (1 + i \times n) = 100.000,00 \left(1 + \frac{0,29}{30 \times 1}\right) = 100.966,67$$

• **Principal corrigido** — Pc

$$Pc = P (1 + iuf) = 100.000,00 (1 + 0,0027) = 100.270,00$$

• **Imposto de renda** — IR

IR = (Montante bruto - Principal corrigido) x alíquota do IR
IR = (100.966,67 - 100.270,00) x 0,315 = 219,45

• **Montante líquido** — Sl

Sl = Sb - IR
Sl = 100.966,67 - 219,45 = 100.747,22

Resposta: O montante líquido é de Cr$ 100.747,22.

As operações de overnight também podem tributar o rendimento bruto, e não somente o ganho real. Isso ocorrendo, o cálculo dos juros líquidos, bem como do montante, ficam simplificados. Nesse caso teremos o seguinte cálculo para uma alíquota genérica de imposto de renda, que chamaremos de IR.

Juros brutos

$$JB = P \times i \times n$$

Juros líquidos

$$JL = (1 - IR)\ JB = (1 - IR) \times P \times i \times n$$

Montante líquido

$$SL = P + JL = P + (1 - IR) \times P \times i \times n$$

$$SL = P\left[1 + (1 - IR) \times i \times n\right]$$

Exemplo 2

Usando os dados do exemplo anterior, calcular os juros e o montante líquido, supondo que a alíquota de tributação do imposto de renda é de 5,00% e incide sobre o rendimento bruto.

Dados:

P = 100.000,00
i = 29,00% a.m.
n = 1 dia
IR = 5,00%

$$JL = (1 - IR) \times P \times i \times n$$

$$JL = (1 - 0{,}05) \times 100.000{,}00 \times \frac{0{,}29}{30} \times 1 = 918{,}33$$

$$SL = P + JL = 100.000{,}00 + 918{,}33 = 100.918{,}33$$

Resposta: Os juros são de Cr$ 918,33, e o montante líquido é de Cr$ 100.918,33.

1.7 Utilização da calculadora HP12C

Para trabalhar no regime de juros simples com auxílio da calculadora HP12C, usaremos as teclas financeiras, que são as seguintes:

n - Período
i - Taxa (sempre expressa em tempos percentuais)
PV - Principal ou valor presente (*present value*)
FV - Montante ou valor futuro (*future value*)

Na HP12C, para utilização das teclas financeiras, devemos usar a convenção de sinal de fluxo de caixa. A convenção mais usada é a de colocar o sinal (-), quando se trata de uma saída de caixa (desembolso), e (+), no caso de uma entrada de caixa (recebimento). A máquina possui a tecla **CHS** (Change Sign), que permite mudar o sinal do número no visor. A HP12C tem utilização limitada na capitalização simples, pois só permite calcular os juros e o montante, além de exigir algumas peculiaridades, como a introdução do período em dias, e a taxa de juros, expressa em termos anuais.

Para usar a rotina, devemos tomar os seguintes cuidados:

1. Limpar os registradores financeiros — **f CLEAR FIN.**
2. Introduzir o período em dias — tecla **n.**
3. Introduzir a taxa de juros anual — tecla **i.**
4. Introduzir o valor do principal com sinal de fluxo de caixa — **CHS PV.**
5. Pressionar **f INT** para obter os juros calculados na base de um ano de 360 dias.
6. Pressionar + para obter o montante.

Exemplos de aplicação

1. Um aplicador investiu Cr$ 2.800,00 a uma taxa de juros simples de 17,00% a.m. pelo período de dois meses. Qual é o montante?

Dados:

P = 2.800,00
n = 2 meses = 60 dias
i = 17,00% a.m. = 17,00 x 12 = 204,00% a.a.

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
60	**n**	Introduz o período em dias
204,00	**i**	Introduz a taxa anual
2.800,00	**CHS PV**	Principal com sinal de fluxo de caixa
f	**INT** ⟶	952,00. Valor dos juros
+	⟶	3.752,00. Valor do montante

Essa máquina permite calcular também juros e montante com base no ano civil (365 dias), e para tal devemos usar a seguinte seqüência de teclas:

1.	**CLX**	Limpa o visor
2.	**f INT**	Valor dos juros
3.	**R↓** (tecla **ROLL DOWN**)	(Mosta o principal no visor)
4.	**x≷y**	Valor dos juros
5.	+	Valor do montante

Usando os dados do exemplo, temos:

CLX	Limpa o visor
f INT	952,00. Valor dos juros
R	2.800,00. Valor do principal
x≷y	938,96. Valor dos juros com base no ano civil
+	3.738,96. Valor do montante com base no ano civil

2. Qual o valor do montante bruto obtido por um aplicador que investiu Cr$ 12.000,00 no overnight a uma taxa de 29,00% ao mês?

Dados:

P = 12.000,00
n = 1 dia

i = 29,00% a.m. = 29,00% x 12 = 348,00% a.a.

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
1	**n**	Introduz o período em dias
348	**i**	Introduz a taxa anual
12.000,00	**CHS PV**	Principal com sinal de fluxo de caixa
f	**INT** ⟶	116,00. Valor dos juros
+	⟶	12.116,00. Valor do montante

1.8 Exercícios de fixação

1. Quais o valor dos juros e o montante a ser pago correspondentes a um empréstimo de Cr$ 100.000,00, sendo a taxa de 14,00 a.m., e o período, de três meses, no regime de capitalização simples?

Resposta: J = Cr$ 42.000,00
S = Cr$ 142.000,00

2. Uma pessoa aplica Cr$ 8.000,00 por 75 dias a uma taxa linear de 20,00 a.a. Calcular os juros e o montante.

Resposta: J = Cr$ 333,33
S = Cr$ 8.333,33

3. Foram aplicados Cr$ 8.000,00 pelo período de 183 dias, que renderam Cr$ 10.000,00 de juros. Quais as taxas de juros mensal e anual?

Resposta: ia.m. = 20,49%
ia.a. = 245,90%

4. Qual o valor dos juros obtidos por um investidor que aplicou Cr$ 2.000,00 pelo período de 37 dias a uma taxa de juros simples de 20,00% ao mês?

Resposta: J = Cr$ 493,33

5. Qual o principal necessário para obter um montante de Cr$ 100.000,00 daqui a seis semestres a uma taxa de juros de 750,00% ao ano?

Resposta: P = Cr$ 4.255,32

6. Em quantos meses um capital dobra no regime de capitalização simples a uma taxa de 18,00% ao mês?

Resposta: n = 5,56 meses

7. Qual o montante de uma aplicação de Cr$ 7.500,00 no open pelo prazo de três semanas a uma taxa de 15,00% ao mês?

Resposta: S = Cr$ 8.287,50

8. Um papel cujo valor de resgate é Cr$ 78.000,00 vence daqui a 48 dias. Se quero ganhar uma taxa de 13,00% ao mês linear, qual é o principal pelo qual devo vender o papel?

Resposta: P = Cr$ 64.569,54

9. Qual a taxa mensal de juros simples que faz um principal de Cr$ 200.000,00 formar um montante de Cr$ 650.000,00 daqui a vinte meses?

Resposta: i = 11,25% a.m.

10. Uma empresa que aplicou Cr$ 800.000,00 no overnight obteve uma taxa de 31,00% ao mês. Quais o valor dos juros e o montante bruto obtido pela empresa?

Resposta: J = Cr$ 8.266,67
S = Cr$ 808.266,67

11. Uma aplicação de Cr$ 500.000,00 pelo período de 195 dias obteve um rendimento de Cr$ 247.800,00. Determinar as taxas anual, semestral, mensal e diária proporcionais.

Resposta: ia.a. = 91,50%
ia.s. = 45,75%
ia.m. = 7,63%
ia.d. = 0,25%

12. Determinar os juros a serem pagos ao final do mês por um correntista cujo extrato mensal é o indicado a seguir, sabendo que o banco cobra uma taxa de juros de 35,00% ao mês.

DATA	SALDO D/C
01/04	2.000,00 (C)
05/04	5.000,00 (D)
12/04	15.000,00 (D)
18/04	4.000,00 (C)
20/04	1.000,00 (D)
25/04	10.000,00 (D)
29/04	1.000,00 (C)

Resposta: J = Cr$ 1.983,33

zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

CAPÍTULO 2

Sistema de juros compostos

2.1 Capitalização composta

É aquela na qual, ao final de cada um dos períodos de capitalização, a taxa de juros incide sobre o principal acrescido dos juros acumulados até o período anterior.

Para exemplificar, suponhamos um investidor que possui Cr$ 1.000,00 para aplicar pelo período de quatro meses em uma aplicação que remunera à taxa i = 10,00% ao mês.

TABELA 2

PERÍODO	SALDO INICIAL	JUROS	SALDO FINAL
0	-	-	1.000,00
1	1.000,00	100,00	1.100,00
2	1.100,00	110,00	1.210,00
3	1.210,00	121,00	1.331,00
4	1.331,00	133,10	1.464,10

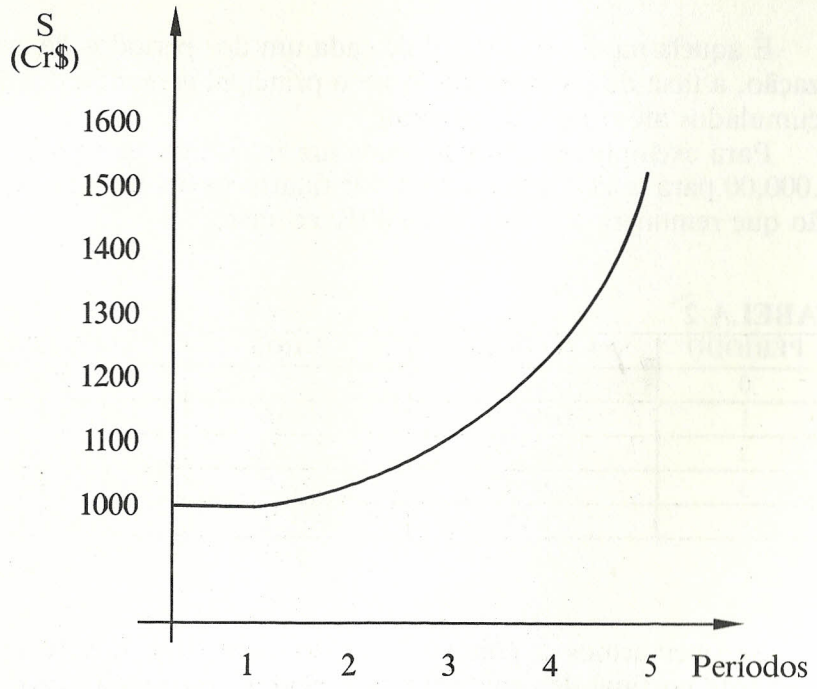
Se obervarmos a coluna do saldo final, que nos fornece o montante no final de cada um dos períodos de capitalização, veremos que cresce de modo que cada valor é igual ao anterior multi-

plicado por um valor constante 1,1 ou (1 + i). Este aspecto é de fundamental importância, pois é a própria definição de uma progressão geométrica de razão (1 + i); com ela, o crescimento deixa de ser linear e passa a ser regido por uma lei exponencial. A perda da linearidade se traduz na perda da validade da regra de três simples.

2.2 Montante

2.2.1 Representação gráfica do montante

Usando os dados da tabela 2, podemos construir um gráfico que mostra a evolução do montante.



A representação gráfica é uma curva exponencial, conseqüência do crescimento em progressão geométrica ao longo do tempo.

2.2.2 Dedução da fórmula

Sabemos que o montante é dado pela seguinte expressão:

$$S = P + J$$

Como na capitalização composta, ao final de cada um dos períodos de capitalização, a taxa de juros incide sobre o principal acrescido dos juros acumulados até o período anterior, temos a seguinte evolução para o montante:

$$S1 = P + J \; ; \; J = P \times i \; ; \; S1 = P + P \times i = P (1 + i)$$

$$S2 = S1 + J \; ; \; J = S1 \times i = P (1 + i) \times i$$

$$S2 = P (1 + i) + P (1 + i) \times i = P (1 + i) \times (1 + i) = P (1 + i)^2$$

$$S3 = S2 + S2 \times i = P (1 + i)^2 + P (1 + i)^2 \times i$$

$$S3 = P (1 + i)^2 (1 + i) = P (1 + i)^3$$

Generalizando para n períodos, temos:

$$Sn = Sn - 1 + Sn - 1 \times i = P (1 + i)^{n - 1} + P (1 + i)^{n - 1} \times i$$

$$Sn = P (1 + i)^{n - 1} (1 + i) = P (1 + i)^n$$

Como n é um período qualquer, poderemos supor que seja o último, sendo, portanto, Sn = S = montante final.

$$\boxed{S = P (1 + i)^n} \quad (1)$$

(1) Fórmula do montante ou fórmula básica da capitalização composta.

Uma outra maneira de se chegar a essa expressão é a partir do fato do montante crescer de acordo com uma progressão geométrica. Lembrando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, temos:

$$an = a1 \times q^{n-1}$$

Sendo:

an = Último termo
a1 = Primeiro termo
q = Razão

Em nosso caso: an = Sn e a1 = S1

$$Sn = S1\ q^{n-1}$$

Lembrando:

$S1 = P(1 + i)$
q = razão = $(1 + i)$

Temos:

$$S = Sn = P\ (1 + i)\ (1 + i)^{(n-1)}$$

$$S = P\ (1 + i)^n$$

Ao usar essa fórmula, devemos ter o cuidado de introduzir a taxa de juros sob a forma de fração decimal. Outro cuidado é o de expressar a unidade de tempo dos períodos de capitalização na mesma unidade de tempo da taxa de juros.

2.3 Fórmulas derivadas

A fórmula básica (1) fornece-nos uma maneira de calcular o montante a partir do conhecimento do principal do período e da taxa de juros. A partir dela podemos obter fórmulas para calcular o principal, o período e a taxa de juros.

- **Determinação do principal:**

$$P = \frac{S}{(1 + 1)^n} \qquad (2)$$

- **Determinação da taxa de juros:**

$$S = P\ (1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n = \frac{S}{P}$$

Extraindo a raiz nésima de ambos membros da igualdade, não a alteramos:

$$\sqrt[n]{(1 + i)^n} = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}\ ;\ (1 + i) = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 \quad \text{ou} \quad i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad (3)$$

• **Determinação do período:**

$$S = P\,(1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n = \frac{S}{P}$$

Tomando o logaritmo de ambos membros da igualdade, não a alteramos:

$$\ln (1 + i)^n = \ln \frac{S}{P}$$

$$n \ln (1 + i) = \ln \frac{S}{P}$$

$$\boxed{n = \frac{\ln \left(\frac{S}{P}\right)}{\ln (1 + i)}} \qquad (4)$$

2.4 Exemplos

1. Foram aplicados Cr$ 1.800,00 durante cinco trimestres a uma taxa de 20,00% ao trimestre, no regime de juros compostos. Qual o montante?

Dados:

P = 1.800,00
n = 5 trimestres

i = 20,00% ao trimestre
S = ?

$$S = P\,(1 + i)^n = 1.800{,}00\,(1 + 0{,}20)^5 = 4.478{,}98$$

2. Foram aplicados Cr$ 18.000,00 a uma taxa de 12,00% ao mês, e foram recebidos Cr$ 10.000,00 de juros. Qual o prazo de aplicação?

Dados:

P = 18.000,00
J = 10.000,00
i = 12,00% ao mês
n = ?

$$S = P + J = 18.000{,}00 + 10.000{,}00 = 28.000{,}00$$

$$n = \frac{\ln \left(\frac{28.000{,}00}{18.000{,}00}\right)}{\ln (1 + 0{,}12)} = 3{,}9 \text{ meses}$$

3. A que taxa de juros semestral um capital de Cr$ 43.000,00 pode ser dobrado em dezoito meses?

Dados:

P = 43.000,00
S = 2 x P = 86.000,00
n = 18 meses = 18/6 = 3 semestres
i = ?

$$i = \left(\frac{86.000,00}{43.000,00}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = (2)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,2599 \text{ ao semestre}$$

$i = 25,99\%$ ao semestre

4. Um título de renda fixa deverá ser resgatado por Cr$ 100.000,00 daqui a sete meses. Sabendo-se que o rendimento desse título é de 13,00% ao bimestre, determinar seu valor presente.

Dados:

S = 100.000,00
i = 13,00% ao bimestre
n = 7 meses = 7/2 = 3,5 bimestres
P = ?

$$P = \frac{100.000,00}{(1 + 0,13)^{3,5}} = 65.196,68$$

5. Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de Cr$ 2.500,00 pelo prazo de dezesseis meses a uma taxa de 78,00% ao semestre?

Dados:

P = 2.500,00
i = 78,00% ao semestre
n = 16 meses = 16/6 semestres
J = ?

$$S = P(1 + i)^n = 2.500,00\ (1 + 0,78)^{\frac{16}{6}} = 11.633,94$$

$$J = S - P = 11.633,94 - 2.500,00 = 9.133,94$$

2.5 Utilização da calculadora HP12C

2.5.1 Funções matemáticas

Na HP12C, para a resolução de problemas financeiros através das fórmulas, vamos usar basicamente as seguintes funções:

- **Potenciação y^x**

Para operar com essa função, os passos a seguir são:

1. Introduzir o número base (y).
2. Pressionar **ENTER**.
3. Introduzir o expoente (x).
4. Pressionar y^x.

Exemplo:

Seja calcular a expressão $(1,17)^{\frac{75}{30}}$:

1,17 **ENTER**

75 **ENTER**

30 ÷

y^x ⟶ 1,48

• **Logaritmo Neperiano LN**

Para operar com ele, deve-se:

1. Introduzir o número.
2. Pressionar **g LN**.

Exemplo:

Seja calcular a seguinte expressão:

$$\ln\left(\frac{30}{50}\right)$$

30	**ENTER**
50	÷
g	**LN** —► **- 0,51**

2.5.2 Uso de teclas financeiras

Para trabalhar no regime de juros compostos com auxílio da HP12C usam-se as teclas financeiras já vistas no capítulo 1.

n = Período (sempre compatível com a taxa)
i = Taxa (sempre expressa em termos percentuais)
PV = Principal ou valor presente (*present value*)
FV = Montante ou valor futuro (*future value*)

Um cuidado que se deve ter, quando estiver sendo usada a capitalização composta, é que esteja aceso o anúncio "c" na parte inferior direita do visor. Este anúncio faz com que seja adotado, na parte fracionária do período, o regime de capitalização composta. Se ele não está aceso, a máquina usa a chamada "convenção

linear", em que os juros são calculados de acordo com o regime de capitalização composta para períodos inteiros, e de acordo com o regime de capitalização simples para períodos fracionários. Para colocar o anúncio "c" no visor basta pressionar STO EEX. Para que desapareça, só é preciso pressionar novamente STO EEX.

Vejamos um exemplo prático:

Seja calcular o montante produzido pela aplicação de Cr$ 1.000,00 durante 75 dias a uma taxa de 17,00% ao mês no regime de capitalização composta.

• **Máquina com o anúncio "c" no visor**

Dados:

P = 1.000,00
i = 17,00% ao mês
n = 75 dias = 75/30 meses

	STO EEX	Coloca o anúncio "c" no visor
f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros de qualquer resíduo de cálculos anteriores
75	**ENTER**	Introduz o número de dias
30	÷	Calcula o número de meses
n		Introduz na tecla financeira do período
17	**i**	Introduz a taxa
1.000,00	**CHS PV**	Valor presente com convenção de fluxo de caixa
FV	—►	1.480,69. Valor do montante

• **Máquina sem o anúncio "c" no visor**

STO EEX Tira o anúncio "c" do visor

(Como a máquina possui memória contínua, não precisamos introduzir novamente os dados.)

FV — 1485,26. Valor do montante usando a convenção linear

Vamos reconstituir o que a máquina fez:

$$75 \text{ dias são } \frac{75}{30} = 2{,}5 \text{ meses}$$

No período inteiro, dois meses, a máquina usou capitalização composta.

$$S = P\,(1 + i)^n = 1.000\,(1{,}17)^2 = 1.368{,}90$$

No período fracionário de quinze dias, usará capitalização simples.

Lembrando o capítulo 1, temos: $S = P\,(1 + i \times n)$

$$S = S1\,(1 + i \times n) = 1368{,}90\,(1 + 0{,}17 \times \frac{15}{30}) = 1485{,}26$$

O uso da convenção linear não é comum no mercado financeiro brasileiro, motivo pelo qual consideramos mais conveniente trabalhar sempre com o anúncio "c" no visor.

O uso da rotina financeira é muito prático; porém, como a máquina consome tempo no processo, durante o qual mostra a palavra "Running" no visor, a aplicação direta das fórmulas fornece resultados mais rápidos.

2.5.3 Cálculo do período com a rotina financeira

O cuidado que se deve ter ao usar a rotina financeira para calcular o período é lembrar que a HP12C arredonda para o inteiro seguinte, se o número é fracionário, o que pode distorcer os resultados.

Exemplo:

Em que período uma aplicação de Cr$ 1.000,00 produz um montante de Cr$ 1.480,69 a uma taxa de juros compostos de 17,00% ao mês?

Primeiro, vamos determinar o período, usando a fórmula para obter o valor exato.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln\,(1 + i)} = \frac{\ln\left(\frac{1.480{,}69}{1.000{,}00}\right)}{\ln\,(1 + 0{,}17)} = 2{,}5 \text{ meses}$$

1.480,69	**ENTER**
1.000,00	÷
g	**LN**
1,17	
g	**LN**
÷	⟶ 2,5 meses

Usando a rotina financeira, temos:

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
17,00	**i**	Introduz a taxa
1.000,00	**CHS PV**	Valor atual com convenção de fluxo de caixa
1.480,69	**FV**	Valor futuro
n	⟶	3 meses, valor do período arredondado para o inteiro seguinte

Supondo que não tivéssemos outra alternativa para encontrar o período a não ser a rotina financeira, indicaríamos um processo iterativo para obter o período correto, no qual usamos a vantagem da máquina ter memória contínua.

1. Pressionar a tecla **FV** para ver qual o montante produzido com n = 3 ⟶ 1.601,61 ≠ 1.480,69, de onde concluímos que n = 3 não é o período correto.

2. Como o montante obtido com n = 3 é maior, introduzir um período menor, por exemplo n = 2:

2 **n**

FV ⟶ 1.368,90 ≠ 1.480,69, de onde concluímos que n = 2 não é o período correto.

3. Como o montante obtido é menor, deve-se, então, partir o intervalo ao meio, ou seja, n = 2,5, e introduzir:

2,5 **n**

FV — 1.480,69 = 1.480,69

Concluímos que n = 2,5 meses é o período correto.

2.5.4 Exemplos

1. Um investidor quer resgatar Cr$ 6.500,00 daqui a oito meses. Se o banco oferece uma rentabilidade de 12,00% ao trimestre, quanto deverá aplicar hoje?

Dados

S = 6.500,00
n = 8 meses = 8/3 trimestres
i = 12,00% ao trimestre
P = ?

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
8	**ENTER**	
3	÷	Calcula o número de trimestres contidos em oito meses
n		Introduz o número de períodos
12,00	**i**	Introduz a taxa de juros
6.500,00	**CHS FV**	Introduz o montante com sinal de fluxo de caixa
PV	⟶	4.804,69. Valor presente ou principal

2. Em que prazo um empréstimo de Cr$ 55.000,00 pode ser quitado em um único pagamento de Cr$ 110.624,65, sabendo-se que a taxa contratada é de 15,00% ao semestre?

Dados:

S = 110.624,65
P = 55.000,00
i = 15,00% ao semestre
n = ?

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
15,00	**i**	Introduz a taxa
55.000,00	**PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
110.624,65	**CHS FV**	Valor futuro com sinal de fluxo de caixa
n	→	5 semestres

Lembrando a observação feita em relação ao cálculo do período com auxílio da rotina financeira, vamos conferir o cálculo.

FV	→	110.624,65. Fato que comprova o valor obtido

3. Uma loja financia um bem de consumo durável no valor de Cr$ 170.000,00, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de Cr$ 353.000,00 no final de onze meses. Qual a taxa de juros mensal cobrada por ela?

Dados:

P = 170.000,00
S = 353.000,00

n = 11 meses
i = ?

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
11	**n**	Introduz o período
170.000,00	**CHS PV**	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
353.000,00	**FV**	Introduz o valor futuro
i	→	6,87% ao mês. Taxa de juros mensal

4. Qual o montante produzido pela aplicação de Cr$ 1.200,00 durante um prazo de sete meses em um fundo de renda fixa que rende 38,00% ao trimestre?

Dados:

P = 1.200,00
i = 38,00 ao trimestre
n = 7 meses = 7/3 trimestres
S = ?

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
1.200,00	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
7	**ENTER**	Introduz o número
3	÷	Cálculo do período em trimestres
n		Introduz o período
38,00	**i**	Introduz a taxa de juros
FV	→	2.544,29. Valor futuro ou montante

2.6 Exercícios de fixação

1. Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de Cr$ 2.700,00 pelo prazo de doze meses a uma taxa de juros de 7,50% ao mês?

Resposta: J = Cr$ 3.730,80

2. Foram aplicados Cr$ 220.000,00 a uma taxa de 11,50% ao ano, e foram recebidos Cr$ 120.000,00 de juros. Qual o prazo da aplicação?

Resposta: n = 4 anos

3. Uma loja financia um televisor de Cr$ 390,00 sem entrada para pagamento em uma única prestação de Cr$ 700,00 no final de cinco meses. Qual a taxa de juros mensal cobrada por ela?

Resposta: i = 12,41% a.m.

4. A que taxa de juros dobra um capital no regime de juros compostos no final de quatro meses?

Resposta: i = 18,92% a.m.

5. Um título de renda fixa deverá ser resgatado por Cr$ 88.000,00 daqui a sete meses. Sabendo-se que o rendimento desse título é de 12,00% ao mês, determinar seu valor presente.

Resposta: P = Cr$ 39.806,73

6. Em que prazo triplicará um capital no regime de juros compostos à taxa de 15,00% ao bimestre?

Resposta: n = 7,86 bimestres

7. Qual o montante obtido por um aplicador que investiu Cr$ 500.000,00 à taxa de juros de 30,00% ao trimestre pelo período de oito meses?

Resposta: S = Cr$ 1.006.511,97

8. Qual o capital investido em uma operação cujo montante é de Cr$ 38.000,00, feita pelo período de um ano à taxa de juros de 13,00% ao mês?

Resposta: P = Cr$ 8.766,82

9. Fiz uma aplicação em CDB no valor de Cr$ 600.000,00 pelo prazo de 85 dias e estimo que a rentabilidade será de 25,00% ao bimestre. Qual é o montante final?

Resposta: S = Cr$ 823.076,94

10. Foi oferecido a um aplicador um papel com rentabilidade de 750,00% ao ano. Qual a taxa mensal?

Resposta: i a.m. = 19.52%

11. Um cliente fez uma aplicação pelo prazo de 21 dias. Se foram aplicados Cr$ 50.000,00, e resgatados Cr$ 58.000,00, qual a taxa mensal da operação?

Resposta: i a.m. = 23,62%

12. Tendo uma restituição de 200 BTN's na minha declaração do IR, fui negociar com o banco, e este deu-me, líquido, 120 BTN's. Se o prazo da operação é 153 dias, qual a taxa mensal de juros cobrada?

Resposta: i a.m. = 10,53%

13. Suponha um RDB de Cr$ 26.500,00 comprado 108 dias antes do vencimento. Se o aplicador quer ganhar 750,00% ao ano, qual o valor do desembolso?

Resposta: P = Cr$ 13.945,05

14. Um terreno está sendo oferecido por Cr$ 450.000,00 à vista, ou Cr$ 150.000,00 de entrada e mais uma parcela de Cr$ 350.000,00 no final de seis meses. Sabendo-se que, no mercado financeiro, a taxa média para aplicação em título de renda pré-fixada gira em torno de 3,50% ao mês, determinar a melhor opção para um interessado com recursos para comprá-lo.

Resposta: O pagamento parcelado é a melhor opção

15. Em quanto tempo um capital pode produzir juros iguais a 50,00% do seu valor, se aplicado a uma taxa de juros de 14,00% ao mês?

Resposta: n = 3,09 meses

CAPÍTULO 3

Juros simples X juros compostos

Uma das dúvidas mais freqüentes é sobre qual regime de capitalização, juros simples ou juros compostos, é o melhor, o mais vantajoso. Antes de definir isso, vamos construir um exemplo para efetuar uma comparação entre ambos e obter algumas conclusões.

Supondo um aplicador que possui Cr$ 1.000,00 para aplicar e a quem é oferecida uma remuneração de i = 10,00% ao mês, vamos estudar o montante obtido nos regimes de juros simples e compostos em diversos períodos.

TABELA 3

PERÍODO EM DIAS	MONTANTE - JUROS SIMPLES $S = P(1 + i \times n)$	MONTANTE - JUROS COMPOSTOS $S = P(1 + i)^n$
5	1.016,67	1.016,01
15	1.050,00	1.048,81
25	1.083,33	1.082,66
30 = 1 mês	1.100,00	1.100,00
60	1.200,00	1.210,00
90	1.300,00	1.331,00
360	2.200,00	3.138,43

Conclusões

1. O montante, no regime de juros simples, cresce de acordo com uma progressão aritmética de razão P x i, e, no de juros compostos, de acordo com uma progressão geométrica de razão (1 + i). Como conseqüência, pode-se ver, na tabela 3, que as diferenças entre os montantes produzidos nos regimes de juros simples e compostos acentuam-se à medida em que cresce o prazo de aplicação.

2. A tabela 3 mostra que:

• Para um período menor que o primeiro período de capitalização (1 mês = 30 dias), o montante obtido no regime de juros simples é maior que o obtido no de compostos.

- Quando n < 30 dias, JS > JC.

• Para um período igual ao do primeiro período de capitalização (30 dias = 1 mês), o montante obtido no regime de juros simples é igual ao obtido no de juros compostos.

- Quando n = 30 dias = primeiro período de capitalização, JS = JC.

• Para um período maior que o primeiro período de capitalização (1 mês = 30 dias), o montante obtido no regime de juros compostos é maior que o obtido no regime de juros simples.

- Quando n > 30 dias, JS < JC.

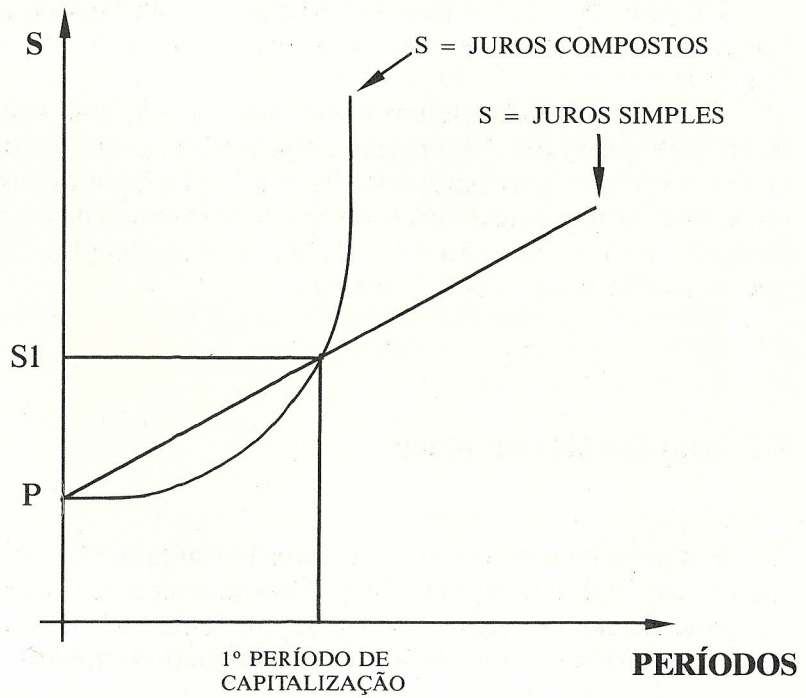
A tabela 3 indica que tanto os juros simples como os compostos podem ser vantajosos, dependendo da situação que se considere. A chave para determinar qual o melhor regime está relacionada com o prazo e o tipo de operação.

No caso de um investidor, se o prazo da aplicação é maior que o do primeiro período de capitalização, os juros compostos são preferíveis. Quando o prazo é inferior ao do primeiro período de capitalização, o regime de juros simples produz um montante maior que o obtido com os juros compostos. Se o prazo da aplicação é igual ao do primeiro período de capitalização, é indiferente fazê-la nos regimes de juros simples ou compostos, pois os montantes obtidos são iguais.

3. Na prática das operações financeiras, usa-se indistintamente juros simples ou compostos.

O uso dos juros simples no mercado financeiro deve-se principalmente à facilidade de cálculo e, em alguns casos, como argumento de venda.

Entretanto, a teoria financeira recomenda que, independentemente da maneira que o cálculo tenha sido efetuado, a análise se faça através das taxas e do regime de juros compostos, como veremos mais adiante, ao analisar o conceito de equivalência de taxas.



S1 - MONTANTE AO FINAL DO 1° PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO

CAPÍTULO 4

Taxas de juros e equivalência de taxas

4.1 Introdução

Existem, em alguns textos acadêmicos, conceitos de taxas divergentes dos praticados nas operações do dia a dia do mercado financeiro.

Conceitos de taxas de juros nominal, efetiva, real, simples (ou linear), composta (ou exponencial), equivalente, proporcional, prestam-se a mais de uma interpretação, sendo essa uma discussão que ultrapassa os objetivos desta obra. Concentraremos nossa atenção, portanto, na conceituação clara das taxas mencionadas segundo o que se pratica no mercado financeiro.

4.2 Taxa simples ou linear

É aquela na qual o valor dos juros é resultante da sua incidência somente sobre o capital inicial. Essa taxa está relacionada com o regime de capitalização simples, já que incide sobre o principal, e não sobre o valor dos juros acumulados periodicamente.

Exemplo:

Seja um capital de Cr$ 2.000,00 aplicado por 35 dias à taxa linear de 12,00% ao mês. Calcular o valor dos juros.

$$J = P \times i \times n = 2.000,00 \times 0,12 \times \frac{35}{30} = 280,00$$

4.3 Taxa composta ou exponencial

É a taxa na qual o valor total dos juros é resultante da sua incidência sobre o capital inicial e também sobre o valor dos juros acumulados periodicamente. Relaciona-se com o regime de capitalização composta.

Exemplo:

Seja um capital de Cr$ 2.000,00 aplicado por 65 dias à taxa composta de 12,00% ao mês. Calcular o valor dos juros.

$$S = P (1 + i)^n$$

$$S = 2.000,00 (1 + 0,12)^{\frac{65}{30}} = 2556,64$$

$$J = S - P = 2.556,64 - 2.000,00 = 556,64$$

4.4 Taxa nominal

É aquela na qual a unidade de referência de seu tempo (ano) não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização (mês).

Exemplo:

18,00% ao ano capitalizados mensalmente

4.4.1 Taxa ao mês por dia útil ou taxa over

É uma taxa nominal muito usada no mercado para expressar, entre outras coisas, as taxas dos empréstimos de curto prazo (*hot money*) e as dos cheques especiais. O overnight também era expresso sob a forma de taxa ao mês por dia útil.

Exemplo:

37,20% ao mês por dia útil

Trata-se de uma taxa nominal, pois a unidade de referência do seu tempo é o mês, e a unidade de referência do período de capitalização é o dia útil.

4.5 Taxa efetiva

Na taxa efetiva, a unidade de referência de tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Exemplos: (usando os dados anteriores)

1 - 18% ao ano capitalizados mensalmente - taxa nominal

$$\text{Taxa efetiva} = \frac{18{,}00}{12} = 1{,}50\% \text{ ao mês capitalizados mensalmente}$$

A unidade de referência de tempo da taxa coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização, o que configura uma taxa efetiva. Neste caso não se menciona o período de capitalização, pois está implícito que é o mesmo. Temos, então:

Taxa efetiva = 1,50% ao mês

2 - 37,20% ao mês por dia útil

$$\text{Taxa efetiva} = \frac{37{,}20}{30} = 1{,}24\% \text{ ao dia útil}$$

Embora a taxa nominal seja usada no mercado financeiro para algumas operações, a boa prática da teoria financeira manda que a comparação entre taxas seja feita com taxas efetivas. Por isso, dada uma taxa nominal, devemos determinar qual é a taxa efetiva contida nela.

4.6 Taxas proporcionais

Duas ou mais taxas são ditas proporcionais quando, ao serem aplicadas sobre o mesmo capital durante o mesmo período, produzem o mesmo montante no regime de juros simples. Ao falar neste, devemos lembrar que uma de suas características é a linearidade e, conseqüentemente, a validade da regra de três simples.

Para reduzir a relação entre taxas proporcionais, imaginemos uma aplicação com os seguintes dados:

n = Período = 1 ano
P = Principal
ia.a. = Taxa anual
ia.s. = Taxa semestral
ia.t. = Taxa trimestral
ia.m. = Taxa mensal
ia.d. = Taxa diária

Vamos supor que ia.a., ia.s., ia.t., ia.m. e ia.d. são proporcionais, por hipótese, e calcular o montante, S, produzido por elas ao final de um ano.

ia.a — $S = P(1 + 1 \times ia.a.)$
ia.s — $S = P(1 + 2 \times ia.s.)$
ia.t. — $S = P(1 + 4 \times ia.t)$
ia.m. — $S = P(1 + 12 \times ia.m.)$
ia.d. — $S = P(1 + 360 \times ia.d.)$

Tratando-se de taxas proporcionais, os primeiros membros da igualdade são iguais (mesmo montante). Igualando os segundos membros e fazendo as devidas simplificações, temos:

$$P\ (1 + ia.a) = P(1 + 2 \times ia.s.) = P\ (1 + 4 \times ia.t.)$$
$$= P\ (1 + 12 \times ia.m.) = P\ (1 + 360 \times ia.d.)$$

$$ia.a. = 2 \times ia.s. = 4 \times ia.t. = 12 \times ia.m. = 360 \times ia.d.$$

Essa relação confirma a linearidade anteriormente mencionada.

Exemplo:

Quais as taxas mensal, semestral e trimestral proporcionais à taxa de 48% ao ano?

$$\text{Mensal} = \frac{48{,}00\%\ \text{a.a.}}{12\ \text{meses}} = 4{,}00\%\ \text{ao mês}$$

$$\text{Semestral} = \frac{48{,}00\%\ \text{a.a.}}{2\ \text{semestres}} = 24{,}00\%\ \text{ao semestre}$$

$$\text{Trimestral} = \frac{48{,}00\ \text{a.a.}}{4\ \text{trimestres}} = 12{,}00\%\ \text{ao trimestre}$$

Generalizando, podemos dizer que duas taxas i e i', que se referem respectivamente aos períodos t e t', serão proporcionais, se for válida a relação.

$$\frac{i}{i'} = \frac{t}{t'}$$

É aconselhável expressar os períodos em dias para compatibilizar suas unidades de tempo e, ao mesmo tempo, por ser a menor unidade de tempo usada no mercado financeiro.

Exemplo:

As taxas 48,00% ao ano e 24,00% ao semestre são proporcionais, pois verifica-se a seguinte relação:

$$\frac{48{,}00}{24{,}00} = \frac{360}{180}$$

4.7 Taxas equivalentes

Duas ou mais taxas são equivalentes se, quando aplicadas sobre mesmo principal durante o mesmo período, produzem o mesmo montante no regime de juros compostos.

Vamos deduzir a relação existente entre taxas equivalentes. Suponhamos o período de um ano, o mesmo principal, P, e que as taxas ia.a., ia.s., ia.t., ia.m. e ia.d. são equivalentes por hipótese.

$$\text{iaa} \quad — \quad S = P\ (1 + ia.a.)^{1}$$
$$\text{ias} \quad — \quad S = P\ (1 + ia.s.)^{2}$$
$$\text{iat} \quad — \quad S = P\ (1 + ia.t.)^{4}$$
$$\text{iam} \quad — \quad S = P\ (1 + ia.m.)^{12}$$
$$\text{iad} \quad — \quad S = P\ (1 + ia.d.)^{360}$$

Como as taxas são equivalentes por hipótese, todos os montantes são iguais, e, conseqüentemente, todos os segundos membros são iguais. Igualando os segundos membros e simplificando, temos:

$$P\,(1 + ia.a.) = P\,(1 + ia.s.)^2 = P\,(1 + ia.t.)^4$$
$$= P\,(1 + ia.m.)^{12} = P\,(1 + ia.d.)^{360}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(i + ia.a.) = (1 + ia.s.)^2 = (i + ia.t.)^4 = \\ &= (1 + ia.m.)^{12} = (1 + ia.d.)^{360}\end{aligned}}$$

Exemplos:

1. Determinar a taxa mensal equivalente a uma taxa de 360,00% ao ano.

$$(1 + ia.a.) = (1 + ia.m.)^{12}$$
$$(1 + ia.a.)^{\frac{1}{12}} = (1 + ia.m.)$$
$$ia.m. = (1 + ia.a.)^{\frac{1}{12}} - 1$$
$$ia.m. = (1 + 3{,}60)^{\frac{1}{12}} - 1$$
$$ia.m. = 0{,}1356$$

A taxa equivalente é de 13,56% ao mês.

2. Determinar a taxa mensal equivalente a uma taxa de 1,00% ao dia.

$$(1 + ia.m.)^{12} = (1 + ia.d.)^{360}$$
$$(1 + ia.m) = (1 + ia.d.)^{\frac{360}{12}}$$
$$ia.m. = (1 + ia.d.)^{30} - 1$$

$$ia.m. = (1 + 0{,}01)^{30} - 1 = 0{,}3478$$

A taxa equivalente é de 34,78% ao mês.

O conceito de equivalência de taxas é de fundamental importância para a análise comparativa, no mercado financeiro, pois, dada uma determinada taxa referente a um período, ela nos permite encontrar a taxa referente a um outro período que lhe é equivalente, e levando em conta que só podemos comparar taxas compostas ou efetivas e referentes ao mesmo período, concluímos que se trata de um instrumento básico, nas discussões a seguir.

Quando a taxa equivalente que queremos determinar refere-se a um período maior que o da taxa conhecida, dizemos que estamos capitalizando a taxa. No caso contrário, dizemos que a estamos descapitalizando.

Vamos deduzir uma fórmula genérica que permite calcular diretamente a taxa equivalente a partir de uma taxa dada.

Sejam:

ic = Taxa conhecida
nc = Período em dias de taxa conhecida
id = Taxa a determinar
nd = Período em dias de taxa a determinar

Estamos trabalhando com o período em dias, pois é comum, no mercado financeiro, a utilização de períodos quebrados, como, por exemplo, 61 dias, 32 dias, etc.

Vamos supor que ic e id são equivalentes por hipótese.

O montante Sc produzido por ic a partir de um principal P, ao final de nd dias, será:

$$Sc = P\,(1 + ic)^{\frac{nd}{nc}}$$

Lembrando que taxa e período devem estar expressos em unidades de tempo compatíveis, temos que nd dias possuem $\frac{nd}{nc}$ períodos de capitalização.

Por sua vez, a taxa a determinar, id, a partir do mesmo principal, P, produzirá um montante Sd ao final de nd dias.

$$Sd = P\ (1 + id)^{\frac{nd}{nd}} = P\ (1 + id)$$

Como as taxas são equivalentes, os montantes obtidos a partir do mesmo principal, P, serão iguais no final de nd dias.

$$Sd = Sc$$

$$P\ (1 + id) = P\ (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}}$$

$$\boxed{id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1} \qquad (1)$$

(1) Fórmula genérica para o cálculo de taxas equivalentes.

Exemplos

1. Um banco está oferecendo a um aplicador uma taxa de 600,00% ao ano para uma aplicação pelo prazo de 63 dias. Qual a taxa bruta do período?

Dados:

ic = 600,00% ao ano
nc = 360 dias
nd = 63 dias

$$id = (1 + 6{,}00)^{\frac{63}{360}} - 1 = 0{,}4057 \text{ para } 63 \text{ dias}$$

A taxa bruta do período é de 40,57%.

2. Com os dados de exemplo anterior, determinar a taxa semestral equivalente.

Dados:

ic = 40,57% para 63 dias
nc = 63 dias
nd = 180 dias

$$id - (1 + 0{,}4057)^{\frac{180}{63}} - 1 = 1{,}6458 \text{ ao semestre}$$

A taxa semestral equivalente é de 164,58%.

Vamos, mediante dois exemplos, ilustrar por que não podemos comparar taxas nominais, sendo somente possível fazê-lo com taxas efetivas ou compostas referentes ao mesmo período.

Um investidor tem duas opções para aplicar seu dinheiro, a saber:

A. 300,00% ao ano capitalizados semestralmente
B. 210,00% ao ano capitalizados mensalmente

Trata-se de duas taxas nominais. Uma pessoa menos avisada escolherá a primeira, pois 300,00% ao ano é mais do que 210,00% ao ano. Vamos determinar as taxas efetivas contidas em cada taxa nominal.

$$A.\ \frac{300{,}00}{2} = 150{,}00\% \text{ ao semestre capitalizados semestralmente ou } 150{,}00\% \text{ ao semestre}$$

$$B.\ \frac{210{,}00}{12} = 17{,}50\% \text{ ao mês capitalizados mensalmente ou } 17{,}50\% \text{ ao mês}$$

Uma vez determinadas as taxas efetivas, devemos levar uma delas ao período da outra para compará-las. Vamos determinar a taxa mensal equivalente à taxa de 150,00% ao semestre.

Dados:

ic = 150% ao semestre
nc = 180 dias
nd = 30 dias

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$id = (1 + 1{,}5)^{\frac{30}{180}} - 1 = 0{,}1650 \text{ ao mês}$$

A taxa mensal equivalente a 150,00% ao semestre é de 16,50%. Fica demonstrado, portanto, que a opção B é melhor que a A, apesar da taxa nominal ser menor.

Com base em outro exemplo, reforcemos os conceitos anteriormente vistos.

O banco XYZ oferece uma taxa linear de 11,00% ao mês pelo prazo de noventa dias, já o banco TUV oferece uma taxa linear de 11,30% ao mês pelo prazo de 120 dias. Qual a melhor opção?

O primeiro passo é determinar a taxa efetiva do período.

$$\text{Banco XYZ ief} = 11{,}00 \times \frac{90}{30} = 33{,}00\% \text{ no período de 90 dias}$$

$$\text{Banco TUV ief} = 11{,}3 \times \frac{120}{30} = 45{,}20\% \text{ no período de 120 dias}$$

Para poder comparar as taxas efetivas, deve-se levar uma delas ao período da outra. Vamos determinar a taxa no período de 120 dias equivalente à taxa de 33,00% ao trimestre.

Dados:

ic = 33,00% ao trimestre
nc = 90 dias
nd = 120 dias

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$id = (1 + 0{,}33)^{\frac{120}{90}} - 1 = 0{,}4626$$

A taxa, equivalente, no período de 120 dias, é de 46,26%. Fica demonstrado que a opção do banco XYZ é melhor do que a do TUV, apesar da taxa linear ser menor.

4.7.1 Determinação da taxa de rendimento total e da taxa mensal equivalente

Muitas vezes um aplicador faz uma série de investimentos consecutivos, tornando-se interessante a determinação da taxa de rendimento total e da taxa mensal equivalente, já que normalmente o padrão de comparação usado é a taxa mensal.

Vamos determinar uma expressão genérica para o cálculo da taxa de rendimento total.

Um aplicador dispunha de um capital P e o aplicou inicialmente por n1 dias, obtendo um rendimento i1; depois, por n2 dias, alcançando um rendimento i2, e assim por diante até aplicar por nk dias e obter um rendimento ik.

n1 — i1
n2 — i2
" — "
" — "
nk-1 — ik - 1
nk — ik

Ao final de n1 dias o aplicador terá um montante:

$S1 = P (1 + i1)$

Como estamos trabalhando com taxas efetivas, ao final de n2 dias terá um montante:

$S2 = S1 (1 + i2)$

$S2 = P (1 + i1) (1 + i2)$

Com um raciocínio similar, podemos chegar ao montante Sk:

$Sk = Sk - 1 (1 + ik) = P (1 + i1) (1 + i2) ... (1 + ik - 1) (1 + ik)$

Como o montante Sk é o referente ao último período, ele passa a ser o montante final:

$$S = Sk = P (1 + i1) (1 + i2) ... (1 + ik - 1) (1 + ik) \quad (2)$$

A taxa de rentabilidade total permite, a partir do mesmo principal P, obter o montante final S, ou seja:

$$S = P (1 + irt) \quad (3), \text{ sendo:}$$

irt = Taxa de rendimento total

Igualando as expressões (3) e (2), pois o montante final é o mesmo, obtemos:

$P (1 + irt) = P (1 + i1) (1 + i2) ..... (1 + ik - 1) (1 + ik)$

$$irt = (1 + i1) (1 + i2) ... (1 + ik - 1) (1 + ik) - 1 \quad (4)$$

Esse processo é conhecido, no mercado, como processo de capitalização de aplicações.

O período total de aplicação é obtido pela soma do número de dias.

nt = Período total
$nt = n1 + n2 + ... + nk-1 + nk$

Para obter a taxa mensal equivalente, usaremos a fórmula (1):

Dados:

irt = Taxa de rendimento total = ic = taxa conhecida
nt = Período total = nc
nd = 30 dias

$$id = (1 + irt)^{\frac{30}{nt}} - 1$$

id = Taxa mensal equivalente

Exemplo:

Um empresário fez as seguintes aplicações:

- Fundo de curto prazo, pelo período de 35 dias, onde obteve um rendimento de 22,00%.
- Fundo de ações, pelo período de 95 dias, onde obteve um rendimento de 120,00%.
- Fundo de renda fixa, pelo período de cinqüenta dias, onde obteve um rendimento de 38,00%.

Determinar a taxa de rendimento total e a taxa mensal equivalente.

Período total = $n1 + n2 + ... + nk = 35 + 95 + 50 =$ 180 dias ou 1 semestre.

$irt = (1 + 0,22) (1 + 1,20) (1 + 0,38) - 1 = 2,7039$ em 180 dias
irt = 270,39% ao semestre

Determinemos, a seguir, a taxa mensal equivalente:

Dados:

ic = 270,39% ao semestre

$$\textbf{i ao mês} = (1 + \text{irt})^{\frac{30}{nt}} - 1$$

nc = 180 dias

nd = 30 dias

$$\text{id} = (1 + 2{,}7039)^{\frac{30}{180}} - 1 = 0{,}2439$$

A taxa mensal equivalente é de 24,39% ao mês.

4.7.2 Determinação da expressão genérica para o cálculo da taxa de rendimento de operações pós-fixadas

As operações pós-fixadas rendem um determinado índice, geralmente a Taxa Referencial (TR), mais uma taxa de juros.

Vamos estabelecer uma expressão genérica para determinar o rendimento quando há incidência de várias correções pelo índice e várias taxas de juro.

Um empresário que possuía um principal P fez uma aplicação com as seguintes características:

1° período - taxa referencial de juros acumulada itrda1, juros i1
2° período - taxa referencial de juros acumulada itrda2, juros i2
,,
,,
K-1-ésimo período - txref de juros acum. itrdak-1, juros ik-1
K-ésimo período - txref de juros acum. itrdak, juros ik

Qual o rendimento obtido? Para determinar o montante obtido em cada período, vamos, inicialmente, corrigir o principal pela

taxa referencial de juros e, posteriormente, aplicar a taxa de juros.

1° período

$P1 = P\ (1 + \text{itrda1}),\ S1 = P1\ (1 + \text{itrda1})\ (1 + i1)$

2° período

$P2 = S1\ (1 + \text{itrda2}),\ S2 = P2\ (1 + i2)$

$S2 = S1\ (1 + \text{itrda2})\ (1 + i2)$
$= P\ (1 + \text{itrda1})\ (1 + i1\ )\ (1 + \text{itrda2})\ (1 + i2)$
,,
,,

K-1-ésimo período

$PK - 1 = SK - 2\ (1 + \text{itrdak} - 1),\ SK - 1 = PK - 1\ (1 + ik - 1)$
$SK - 1 = P\ (1 + \text{itrda1})\ (1 + i1)\ (1 + \text{itrda2})\ (1 + i2)\ \ldots$
$\ldots\ (1 + \text{itrdak-1})\ (1 + ik\text{-}1)$

K-ésimo período

$PK = SK - 1\ (1 + \text{itrdak}),\ SK = PK\ (1 + ik)$

$$SK = P\ (i + \text{itrda1})\ (1 + i1)\ (i + \text{itrda2})\ (1 + i2)\ \ldots\ \ldots\ (1 + \text{itrdak})\ (1 + ik) \qquad (5)$$

Como a aplicação é feita por K períodos, temos que SK = S = montante final.

A taxa de rendimento total irt, é tal que, aplicada sobre o mesmo principal P, produz o mesmo montante S.

$$S = P\ (1 + \text{irt}) \qquad (6)$$

Igualando as expressões (5) e (6), temos:

$$P\,(1 + irt) = P\,(1 + itrda1)\,(1 + i1)\,(1 + itrda2)\,(1 + i2) \ldots (1 + itrdak)\,(1 + ik)$$

$$\boxed{irt = (1 + itrda1)\,(1 + i1)\,(1 + itrda2)\,(1 + i2) \ldots (1 + itrdak)\,(1 + ik) - 1} \quad (7)$$

Exemplo:

Um executivo fez uma aplicação pós-fixada com as seguintes características:

1° mês - irtda1 = 15,00%, i1 = 1,50%
2° mês - itrda2 = 10,00%, i2 = 3,00%
3° mês - itrda3 = 8,00%, i3 = 2,00%

Qual o rendimento total do aplicador, e qual a taxa mensal equivalente?

$$irt = (1 + 0{,}15)\,(1 + 0{,}015)\,(1 + 0{,}10)\,(1 + 0{,}03)\,(1 + 0{,}08)\,(1 + 0{,}02) - 1 = 0{,}4569$$

irt = 45,69% ao trimestre

Para cálculo de taxa mensal equivalente, temos:

Dados:

ic = 45,69% ao trimestre
nc = 90 dias
nd = 30 dias

$$i \text{ ao mês} = (1 + irt)^{\frac{30}{nt}} - 1$$

$$ia.m. = (1 + 0{,}4569)^{\frac{30}{90}} - 1 = 0{,}1336$$

A taxa mensal equivalente é de 13,36%.

Se o índice é a inflação ou correção monetária, com um raciocínio análogo podemos chegar a uma expressão simular a (7). Supondo várias correções monetárias e várias taxas de juros, a expressão obtida será:

$$\boxed{irt = (1 + icm1)\,(1 + i1)\,(1 + icm2)\,(1 + i2) \ldots (1 + icmk)\,(1 + ik) - 1} \quad (8)$$

Sendo:

icmj = Correção monetária referente ao j-ésimo período
ij = Taxa de juros referente ao j-ésimo período.

4.8 Taxa real

A taxa real é calculada a partir da efetiva, descontando-se os efeitos inflacionários. Na realidade, o que se pretende determinar é o ganho acima da inflação (se existe) obtido pelo capitalista. Vamos deduzir uma expressão genérica para a determinação da taxa real.

Simbologia:

irt = Taxa bruta ou rendimento total do período
icm = Taxa de inflação ou de correção monetária do período
irr = Taxa real do período

Suponhamos um aplicador que possui um capital P para investir pelo período. O montante S, obtido, pode ser determinado de duas maneiras, a saber:

- Aplicando a taxa bruta sobre o principal:

$$S = P\,(1 + irt)$$

- Calculando primeiro o principal corrigido pela inflação do período e aplicando a seguir a taxa real sobre o principal corrigido:

$$P' = P\,(1 + icm)$$
$$S = P'\,(1 + irr) = P\,(1 + icm)\,(1 + irr)$$

Como os montantes devem ser iguais, no final do período, e lembrando que o principal é o mesmo, temos:

$$P\,(1 + icm)\,(1 + irr) = P\,(1 + irt)$$

De onde obtemos:

$$(1 + irr) = \frac{(1 + irt)}{(1 + icm)}$$

$$\boxed{irr = \frac{(1 + irt)}{(1 + icm)} - 1} \qquad (9)$$

Exemplo:

Sabendo que um aplicador investiu Cr$ 200.000,00 e recebeu Cr$ 300.000,00 ao final de 65 dias, se a inflação do período foi de 30%, qual a taxa de juros real obtida por ele?

Dados:

P = 200.000,00
S = 300.000,00
icm = 30,00% para 65 dias
n = 65 dias

Lembrando a fórmula (3) do capítulo 2, temos:

$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$, neste caso, n = 1, pois queremos a taxa de rendimento de todo o período.

$$irt = \frac{S}{P} - 1 = \frac{300.000,00}{200.000,00} - 1 = 0,50$$

Taxa efetiva: 50,00% no período de 65 dias.

$$ir = \frac{(1 + irt)}{(1 + icm)} - 1 = \frac{(1 + 0,5)}{(1 + 0,3)} - 1 = 0,1538$$

A taxa real é de 15,38% no período de 65 dias.

4.9 Ganho acima da Taxa Referencial Diária Acumulada (TRDA)

Após as mudanças impostas pelo Plano Collor II no mercado financeiro, tornou-se interessante determinar o ganho acima da Taxa Referencial Diária Acumulada (TRDA).Para tanto podemos, com um raciocínio análogo ao do item 4.8, chegar a uma fórmula similar à (9), onde a correção monetária do período (icm) é substituída pela TRDA do período (itrda).

Simbologia:

irt = Taxa bruta ou de rendimento total do período
itrda = Taxa referencial diária acumulada no período
irtrda = Taxa de ganho acima da TRDA do período

Temos, então, a seguinte fórmula:

$$\boxed{irtrda = \frac{(1 + irt)}{(1 + itrda)} - 1} \qquad (10)$$

Exemplo:

Um aplicador teve um rendimento bruto de 30,00% no período de 65 dias ao aplicar num fundo de renda fixa. A variação da TR foi de 8,50% no primeiro mês, de 9,00%, no segundo, e de 4,00%, nos últimos quinze dias. Calcular o ganho acima da TRDA obtido.

• Cálculo da TRDA:

itrda1 = 0,085, itrda2 = 0,09, itrda3 = 0,04
itrda = (1 + itrda1) (1 + itrda2) (1 + itrda3) - 1
itrda = (1 + 0,085) (1 + 0,09) (1 + 0,04) - 1
itrda = 0,23 ou 23,00% no período de 65 dias.

• Cálculo do ganho acima da TRDA:

$$irtrda = \frac{(1 + 0,30)}{(1 + 0,23)} - 1 = 0,0569$$

O ganho acima da Taxa Referencial Diária foi de 5,69% no período de 65 dias.

4.10 Utilização da calculadora HP12C

4.10.1 Exemplo do uso da fórmula genérica para cálculo de taxas equivalentes

Um banco está oferecendo a um aplicador uma taxa anual de 630,00% pelo período de 68 dias. Qual a taxa bruta do período?

Dados:

ic = 630,00% ao ano
nc = 360 dias
nd = 68 dias

$$id = (1 + 6,3)^{\frac{68}{360}} - 1 = 0,4557$$

A taxa bruta do período é de 45,57% em 68 dias.

Na HP12C a seqüência de teclas é:

1	**ENTER**
6,3	+
68	**ENTER**
360	÷
y^x	
1	- 0,4557. Taxa bruta no período de 68 dias

4.10.2 Cálculo da equivalência pela rotina financeira

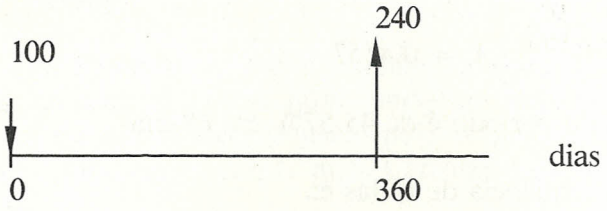
Com o auxílio do conceito de fluxo de caixa podemos calcular taxas equivalentes, usando as teclas financeiras. Vamos resolver um exemplo para ilustrar o procedimento a ser seguido.

Seja calcular a taxa trimestral equivalente a uma taxa de 140,00% ao ano.

Dados:

ie = 140,00% ao ano
nc = 360 dias
nd = 90 dias

Vamos supor um principal de Cr$ 100. Como a taxa anual é de 140,00%, teremos Cr$ 240,00, no final do mesmo. Conseqüentemente, podemos construir o seguinte fluxo de caixa:



Para usar a rotina financeira, a chave é utilizar sempre, no período n, a seguinte relação.

$$n = \frac{\text{Período da operação}}{\text{Período da taxa desejada}}$$

No nosso caso, a relação será $n = \frac{360}{90} = 4$

Usando a rotina financeira, temos:

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
100	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
240	**FV**	Valor futuro
360	**ENTER**	Período em dias da operação
90	÷	Período em dias da taxa desejada
n		Introduz a relação na techa n
i	⟶	24,47. Valor da taxa trimestral equivalente

Uma das vantagens da memória contínua da HP12C é que, uma vez introduzidos os dados do fluxo de caixa, podemos calcular a taxa equivalente para qualquer período desejado, bastando colocar na tecla n a relação adequada.

Com os dados do exerccício anterior, calcular a taxa equivalente para 38 dias e para 250 dias.

- Para 38 dias, procedemos da seguinte maneira:

$$n = \frac{360}{38}$$

Na HP12C, procedemos do seguinte modo:

360	**ENTER**	Período em dias da operação
38	÷	Período em dias da taxa desejada
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	9,68. Valor da taxa equivalente no período de 38 dias

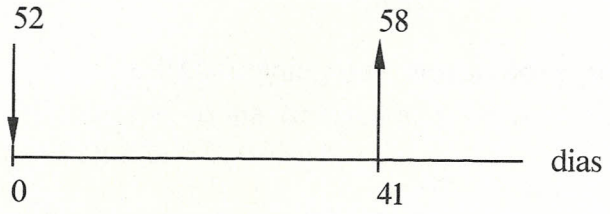
- Para 250 dias

$$n = \frac{360}{250}$$

360	**ENTER**	Período em dias da operação
250	÷	Período em dias da taxa desejada
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	83,67. Valor da taxa equivalente no período de 250 dias

Vejamos um outro exemplo de determinação da taxa efetiva.

Uma operação pelo prazo de 41 dias tem o fluxo de caixa indicado a seguir:



Qual a taxa anual da operação?

• Solução pela rotina financeira

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
52	**CHS PV**	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
58	**FV**	Introduz a valor futuro
41	**ENTER**	Período em dias da operação
360	÷	Período em dias da taxa desejada
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	160,86% a.a. Taxa efetiva anual da operação

4.10.3 Comparação entre alternativas de investimento

A equivalência de taxas é muito útil quando queremos comparar alternativas de investimento. Vimos que só podemos comparar taxas efetivas ou compostas e referentes ao mesmo período.

Exemplo:

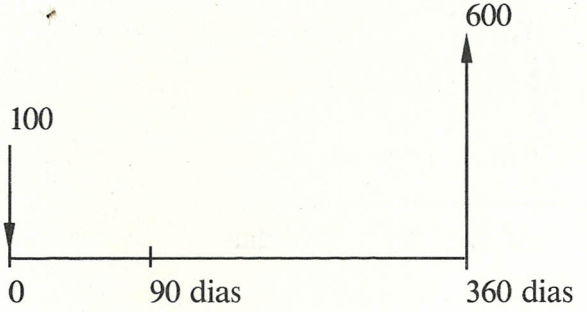
Sejam três alternativas de investimento:

- Caderneta de poupança que rende 68,52% ao trimestre.
- CDB que rende 500,00% ao ano.
- Fundo de renda fixa que rende 20,00% ao mês.

Essas taxas possuem períodos de capitalização diferentes. Para que possamos compará-las, devemos levar todas ao mesmo período, sendo a melhor opção fixar o período de uma delas e levar as outras duas para o mesmo, mediante equivalência de taxas.

Fixaremos o trimestre como período de comparação, para onde levaremos as outras duas taxas.

• Cálculo da taxa trimestral equivalente a 500,00% ao ano



Dados:

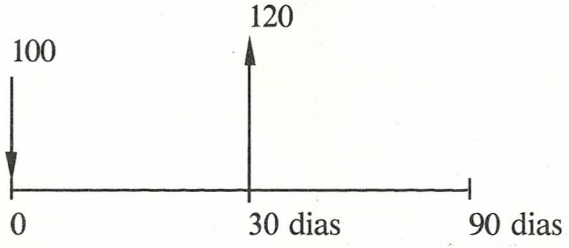
ic = 500,00% ao ano
período da operação = 360 dias
período da taxa desejada = 90 dias

$$n = \frac{360}{90}$$

Na HP12C, temos:

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
100	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
600	**FV**	Valor futuro
360	**ENTER**	Período em dias da operação
90	÷	Períodos em dias da taxa desejada
n		Introduz o valor da relação na tecla n
i	⟶	56,51. Valor da taxa trimestral equivalente

• Cálculo da taxa trimestral equivalente a 20,00% ao mês



Dados:

ic = 20,00% ao mês
período da operação = 30 dias
período da taxa desejada = 90 dias

$$n = \frac{30}{90}$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros

100	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
120	**FV**	Valor futuro
30	**ENTER**	Período em dias da operação
90	÷	Período em dias da taxa desejada
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	72,80. Valor da taxa trimestral equivalente

A melhor opção é aplicar no fundo de renda fixa.

4.11 Exercícios de fixação

1. Um cliente possui três opções de aplicação e quer saber qual é a melhor opção.

— Poupança que rende 17,00% ao mês
— Fundo de curto prazo que rende 72,80% ao trimestre
— CDB que rende 700,00% ao ano

Resposta: O fundo de curto prazo é a melhor opção

2. Quais as taxas mensal e semestral equivalentes à taxa de 750,00% ao ano?

Resposta: ia.m. = 19,52%; ia.s. = 191,55%

3. Obter as taxas efetivas anuais equivalentes a uma taxa nominal de 240,00% a.a. com os seguintes períodos de capitalização:

a. mensal

b. trimestral
c. semestral

Resposta: a. ia.a. = 791,61%
b. ia.a. = 555,36%
c. ia.a = 384,00%

4. Um executivo tem as duas opções de aplicação a seguir. Qual a melhor?

a. 150,00% ao ano capitalizados mensalmente
b. 200,00% ao ano capitalizados semestralmente

Resposta: A melhor opção é a de letra a.

5. Quanto terá daqui a dois anos um empresário que aplicou Cr$ 1.000,00 à taxa de 220,00% ao ano capitalizados mensalmente?

Resposta: O investidor terá Cr$ 56.829,04

6. Qual a taxa efetiva trimestral equivalente a uma taxa nominal de 200,00% ao ano capitalizados mensalmente?

Resposta: ia.t. = 58,80%

7. Uma pessoa possui três opções de taxa para tomar um empréstimo: a, b e c. Qual deverá escolher?

a. 24,00% para 35 dias
b. 229,00 para 178 dias
c. 884,00% para 345 dias

Resposta: A opção a ser escolhida será a de letra a.

8. Um sujeito, ao fazer uma aplicação, obteve os seguintes rendimentos:

1° trimestre: 66,00%
2° trimestre: 59,00%
3° trimestre: 65,00%
4° trimestre: 63,00%

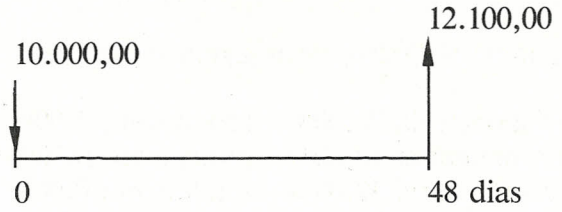
Calcular as taxas mensal e semestral equivalentes à taxa de rendimento total.

Resposta: ia.m. = 17,74%; ia.s. = 166,43%

9. Um empresário fez uma aplicação no overnight pelo período de três meses, tendo obtido 15,00% de rendimento no primeiro mês, 20,00% no segundo, e 18,00% no terceiro mês. Calcular o rendimento total e o rendimento mensal equivalente.

Resposta: ia.t. = 62,84%; ia.m. = 17,65%

10. Dada uma operação descrita pelo seguinte fluxo de caixa:



Quais as taxas de 183 dias e anual equivalentes?

Resposta: i183 dias = 106,83%, ia.a. = 317,72%

11. Um aplicador investe Cr$ 56.000,00 em letra de câmbio que oferece uma rentabilidade de 720,00% ao ano. Se a operação é por um período de 107 dias, qual é o montante?

Resposta: O montante é de Cr$ 104.663,15

12. Dada uma taxa efetiva anual de 180,00%.

a. Calcular a taxa trimestral equivalente.
b. Obter a taxa nominal ao ano proporcional à taxa trimestral.

Resposta: a. ia.t. = 29,36%
b. ia.a. = 117,43%

13. Um cliente tem duas opções de aplicação em papel decorrido.

Banco A - 92 dias - taxa 10,80% ao mês linear
Banco B - 123 dias - taxa 10,90% ao mês linear
a. Qual a melhor opção?
b. Calcular a taxa linear mês do banco A, se o período de aplicação fosse o mesmo que o do banco B (123 dias), mantida sua taxa efetiva (banco A).

Resposta: a. A melhor opção é a do banco A
b. A taxa linear mês é de 11,36%

14. Um cliente fez uma aplicação com as seguintes características:

1° mês - correção monetária 20,00% - rendimento 1,00%
2° mês - correção monetária 18,00% - rendimento 0,70%
3° mês - correção monetária 32,00% - rendimento 0,90%

a. Qual o rendimento total obtido pelo aplicador?
b. Qual o rendimento mensal equivalente?
c. Qual o rendimento real obtido pelo aplicador?

Resposta: a. ia.t. = 91,81%
b. ia.m. = 24,25%
c. ireal = 2,62% no trimestre

zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

CAPÍTULO 5

Desconto

5.1 Introdução

O desconto deve ser entendido como a diferença entre o valor futuro (valor na data do resgate) e o valor atual de um título (valor na data da operação).

$$D = S - P \quad (1)$$

Sendo:

D = Valor monetário do desconto
S = Valor futuro (na data de vencimento)
P = Valor atual (na data da operação)

Na matemática financeira existem dois tipos de desconto: simples e composto.

• **Desconto simples**

É o obtido em função de cálculos lineares. São conhecidos dois tipos de desconto simples:

— Desconto simples "por fora" (ou bancário, ou comercial)
Obtido multiplicando-se o valor do resgate do título pela taxa de desconto e pelo prazo a decorrer até o vencimento. Essa modalidade é amplamente usada nas operações bancárias.

— Desconto "por dentro" (ou racional)
Obtido multiplicando-se o valor atual do título pela taxa de desconto e pelo prazo a decorrer até o vencimento do título. Não tem aplicação prática.

• **Desconto composto**

É o obtido em função de cálculos exponenciais. São conhecidos dois tipos de desconto composto:

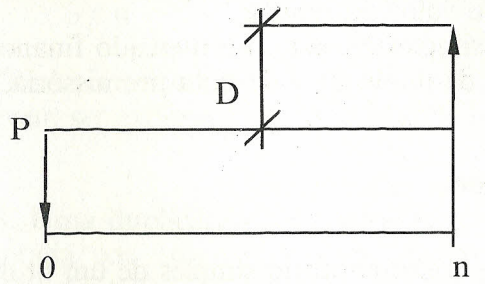
— Desconto composto "por fora"
É aquele no qual a taxa de desconto incide somente sobre o valor futuro dos títulos, tantas vezes quantos forem os períodos unitários. Não tem aplicação prática.

— Desconto composto "por dentro" (ou racional)
É dado pela diferença entre o valor futuro de um título e seu valor atual, calculado com base no regime de capitalização composta. Essa modalidade também não possui aplicação prática.

A operação de desconto é realizada sempre no curto prazo no mercado financeiro. Devido ao fato do desconto simples "por fora" ou bancário ou comercial ser a modalidade de desconto normalmente usada nas operações do mercado financeiro, nosso estudo limitar-se-á a esse tipo.

5.2 Desconto "por fora"

É obtido multiplicando-se o valor de resgate do título pela taxa de desconto, e este produto, pelo prazo a decorrer até o vencimento do título.



$$D = S - P$$

$$D = S \times n \times id \qquad (2)$$

Sendo:

D = Desconto
n = Prazo a decorrer até o vencimento
id = Taxa de desconto

É preciso lembrar que n e id devem ser expressos em unidades de tempo compatíveis e que id deve ser expressa sob a forma de fração decimal. A incógnita na operação de desconto é o principal. De (1) podemos obter:

$$P = S - D$$

Substituindo D pela expressão obtida em (2):

$$P = S - S \times n \times id = S (1 - n \times id)$$

$$\boxed{P = S\,(1 - n \times id)} \qquad (3)$$

A fórmula do desconto simples "por fora" (D = S x id x n) é similar à dos juros, no sistema de capitalização simples (J = P x i x n).

A diferença fundamental é que, no desconto, a taxa de juros incide sobre o montante ou valor do resgate.

O desconto bancário simples é usado, no mercado financeiro, em operações de desconto de duplicata e de nota promissória.

5.2.1 Exercícios de aplicação

1. Qual o valor do desconto bancário simples de um título de Cr$ 2.000,00, com vencimento para 93 dias, à taxa de 10,00% a.m.?

Dados:

S = 2.000,00
id = 10,00% a.m.
n = 93 dias

$D = S \times id \times n$

$$D = 2.000{,}00 \times 0{,}10 \times \frac{93}{30} = 620{,}00$$

2. Qual a taxa mensal de desconto bancário simples utilizada numa operação de 112 dias, cujo valor de resgate é de Cr$ 1.000,00 e cujo valor atual é de Cr$ 550,00?

Dados:

S = 1.000,00
P = 550,00
n = 112 dias

$D = S \times id \times n$

$D = S - P = 1.000{,}00 - 550{,}00 = 450{,}00$

$$id = \frac{D}{S \times n} = \frac{450{,}00}{1.000{,}00 \times \frac{112}{30}} = 0{,}1205 \text{ a.m. ou } 12{,}05\% \text{ a.m.}$$

Observação: A taxa está expressa ao mês porque ela e o período devem ser expressos em unidades de tempo compatíveis.

3. Uma duplicata no valor de Cr$ 6.800,00 no vencimento é descontada por um banco, gerando um crédito de Cr$ 5.100,00 na conta do cliente. Sabendo-se que a taxa cobrada pelo banco é de 6,50% a.m., determinar o prazo de vencimento da duplicata.

Dados:

S = 6.800,00
P = 5.100,00
id = 6,50% a.m.

$D = S - P$
$D = 6.800{,}00 - 5.100{,}00 = 1.700{,}00$
$D = S \times id \times n$

$$n = \frac{D}{S \times id}$$

$$n = \frac{1.700{,}00}{6.800{,}00 \times 0{,}065} = 3{,}8462 \text{ meses ou } 115{,}38 \text{ dias}$$

4. Qual o montante de duplicatas que uma empresa precisa descontar para receber um crédito de Cr$ 20.000.000,00 em sua conta, se o prazo de operação é de 36 dias, e a taxa de juros praticada pela instituição financeira, de 20,00% a.m.?

Dados:

P = 20.000.000,00
n = 36 dias
id = 20,00% a.m.

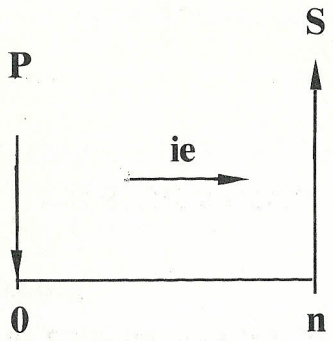
$$P = S (1 - n \times id)$$

$$S = \frac{P}{(1 - n \times id)}$$

$$S = \frac{20.000.000,00}{(1 - \frac{36}{30} \times 0,20)} = 26.315.789,48$$

O montante de duplicatas a ser descontado é de Cr$ 26.315.789,47.

5.3 Cálculo de taxa efetiva ou composta de uma operação de desconto bancário simples



A taxa de desconto bancário simples d é uma taxa linear ou nominal. Para obter a efetiva embutida na operação, vamos usar

a conceituação já estudada quando da análise do sistema de capitalização composta.

Sendo:

P = Principal ou valor atual
S = Montante ou valor de resgate do título
ie = Taxa efetiva ou composta da operação referente ao período n
n = Período da operação

Segundo a fórmula dos juros compostos, $S = P (1 + i)^n$. Neste caso temos que n = 1, pois a taxa efetiva ie refere-se ao período total n.

$$S = P (1 + ie) \quad (4)$$

$$ie = \frac{S}{P} - 1 \quad (5)$$

Através da fórmula (3) e, posteriormente, (4), podemos estabelecer uma relação entre a taxa de desconto id e a taxa efetiva ie do período da operação.

Isolando S na fórmula (3), obtemos:

$$S = \frac{P}{(1 - n \times id)} \quad (6)$$

Igualando as expressões (4) e (6), já que as duas fornecem o montante, e simplificando o principal, obtemos:

$$(1 + ie) = \frac{1}{(1 - n \times id)}$$

$$ie = \frac{1}{(1 - n \times id)} - 1 \qquad (7)$$

A expressão (7) fornece a taxa efetiva do período da operação a partir da taxa de desconto.

Uma vez determinada a taxa efetiva referente ao período n, mediante a equivalência de taxas podemos determinar a taxa efetiva referente a outro período qualquer.

5.3.1 Cálculo do IOC

Para determinar a taxa efetiva real de uma operação de desconto bancário simples, devemos considerar o valor atual líquido do imposto sobre operações de crédito, câmbio, seguro e sobre operações relativas a títulos e valores mobiliários, normalmente abreviado como IOC.

- Base de cálculo - Valor nominal dos títulos - (valor de resgate)
- Alíquota - A = 0,0041% ao dia para pessoa jurídica e pessoa física

As operações feitas na pessoa jurídica com prazo de noventa ou mais dias estão isentas do IOC.

Se houver taxas cobradas pelos bancos comerciais, elas deverão ser consideradas.

Vejamos alguns exemplos de aplicação:

Exemplo 1

Um banco oferece a uma empresa um desconto de duplicatas no valor de 10.000,00 unidades de capital. A taxa de desconto é de 13,00% a.m., e o prazo, de 85 dias. Considerar a incidência do IOC.

a. Determinar o valor creditado na conta da empresa
b. Determinar a taxa efetiva da operação
c. Determinar a taxa mensal da operação

a. Cálculo do valor atual

a1. Cálculo do IOC

IOC = S x A x n
A = alíquota = 0,0000 41 a.d.
n = prazo de resgate em dias = 85

IOC = 10.000,00 x 0,000041 x 85 = 34,85

a2. Cálculo do desconto

D = S x id x n

$$D = 10.000,00 \times 0,13 \times \frac{85}{30} = 3.683,33$$

a3. Cálculo do valor atual

P = S - D - IOC

P = 10.000,00 - 3.683,33 - 34,85 = 6.281,82

b. Taxa efetiva

$$ie = \frac{S}{P} - 1$$

$$ic = \frac{10.000,00}{6.281,82} - 1 = 0,5918 \text{ ou } 59,18\% \text{ para 85 dias}$$

c. Determinação da taxa mensal efetiva

Lembrando:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}}$$

Dados:

ic = 59,18% para 85 dias
nc = 85 dias
nd = 30 dias

$$id = (1 + 0{,}5918)^{\frac{30}{85}} - 1 = 0{,}1783, \text{ ou } 17{,}83\% \text{ ao mês}$$

Exemplo 2

A operação de desconto é de curto prazo e não pode ser aplicada a prazos longos. Vamos mostrar a validade desta afirmação.

Um cliente desavisado entra no banco e encontra a taxa de desconto nominal de 15,00% a.m. e quer descontar um título de Cr$ 100.000,00 pelo prazo de sete meses. Qual é o valor recebido?

Dados:

S = 100.000,00
id = 15,00%
n = 7 meses
P = ?

$D = S \times id \times n$

$D = 100.000{,}00 \times 0{,}15 \times 7 = 105.000{,}00$

$P = S - D = 100.000{,}00 - 105.000{,}00 = -5.000{,}00$

O resultado mostra que o cálculo é empírico, e não pode ser aplicado a prazos longos.

5.3.2 Cálculo do efeito das comissões e taxas

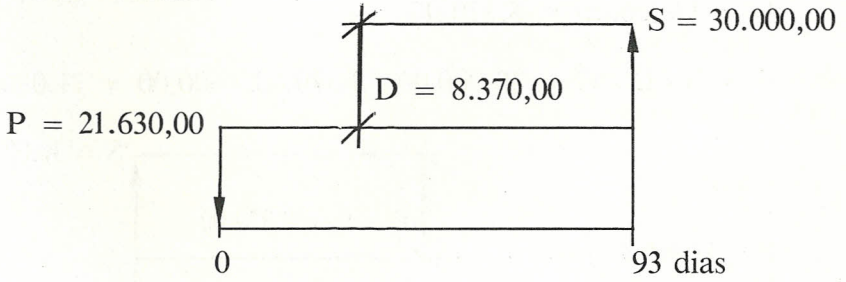
Vamos ilustrar o efeito das comissões ou taxas em uma operação de desconto bancário simples.

Seja uma operação de desconto de duplicatas com as seguintes características:

Valor da duplicata = Cr$ 30.000,00
Taxa = 9,00% a.m.
Prazo = 93 dias

O banco cobra, antecipadamente, uma comissão de 2,00% sobre o valor nominal. Calcular a taxa efetiva mensal da operação com e sem comissão.

• **Sem comissão**



Dados:

S = 30.000,00
id = 9,00% a.m.
n = 93 dias

$$D = 30.000{,}00 \times 0{,}09 \times \frac{93}{30} = 8.370{,}00$$

— Cálculo do principal

$$P = S - D = 30.000,00 - 8.370,00 = 21.630,00$$

— Cálculo da taxa efetiva

$$ie = \frac{S}{P} - 1 = \frac{30.000,00}{21.630,00} - 1 = 0,3870 \text{ ou } 38,70\% \text{ para 93 dias}$$

— Cálculo da taxa efetiva mensal

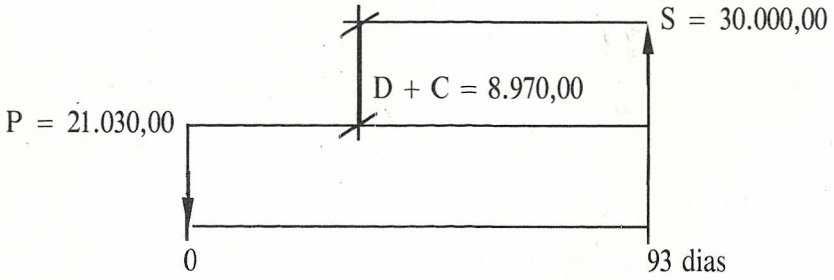
$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$id = (1 + 0,3870)^{\frac{30}{93}} - 1 = 0,1113 \text{ a.m. ou } 11,13\% \text{ a.m.}$$

• Com comissão

C = Comissão = 0,02 x 30.000,00 = 600,00
D = Desconto = 8.370,00

$$P = S - D - C = 30.000,00 - 8.370,00 - 600,00 = 21.030,00$$



— Cálculo da taxa efetiva

$$ie = \frac{S}{P} - 1 = \frac{30.000,00}{21.030,00} - 1 = 0,4265 \text{ para 93 dias ou } 42,65\% \text{ para 93 dias}$$

— Cálculo da taxa efetiva mensal

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1 + 0,4265)^{\frac{30}{93}} - 1 = 0,1214 \text{ a.m ou } 12,14\% \text{ a.m}$$

Uma comissão de 2,00% sobre o valor nominal faz com que a taxa mensal efetiva da operação mude de 11,13% para 12,14% ao mês.

5.3.3 Cálculo do valor do desconto bancário simples para série de títulos de mesmo valor e vencimentos periódicos

Admitamos que sejam apresentados a um banco três títulos, no valor de Cr$ 2.500,00 cada um, com vencimento em trinta, sessenta e noventa dias, respectivamente. Sabendo que a taxa de desconto cobrada pelo banco é de 9,00% a.m., calcular o valor do desconto total e o valor líquido correspondente a ser creditado na conta do cliente.

Vamos primeiro obter o desconto global a partir do cálculo individual de cada título e depois obter uma fórmula simplificada.

• Obtenção do desconto global a partir do cálculo individual

$$D = S \times id \times n$$

$$D1 = 2.500,00 \times 0,09 \times \frac{30}{30} = 225,00$$

$$D2 = 2.500,00 \times 0,09 \times \frac{60}{30} = 450,00$$

$$D3 = 2.500,00 \times 0,09 \times \frac{90}{30} = 675,00$$

$$DT = D1 + D2 + D3 = 1.350,00$$

• **Dedução da fórmula simplificada**

$$DT = D1 + D2 + D3$$

$$DT = 2.500,00 \times 0.09 \times 1 + 2.500,00 \times 0,09 \times 2 + 2.500,00 \times 0,09 \times 3$$

$$DT = 2.500,00 \times 0,09 \times (1 + 2 + 3)$$

A expressão entre parênteses nada mais é que uma progressão aritmética.

Lembrando a expressão que nos fornece a soma dos termos de uma progressão aritmética, temos:

$$SOMA = \frac{(a1 + an) \times n}{2}$$

Onde:

a1 = Primeiro termo
an = Termo de ordem n
n = Número de termos

Neste caso:

a1 = Prazo do título que vence primeiro
an = Prazo do título que vence por último
n = Número de títulos

No exemplo acima:

a1 = 1
an = 3
n = 3

Tentando alcançar uma expressão genérica, obtemos:

$$DT = 2.500,00 \times 0,09 \times (1 + 2 + 3)$$

$$DT = 2.500,00 \times 0,09 \times \left(\frac{1 + 3}{2}\right) \times 3$$

$$DT = 1.350,00$$

$$DT = S \times id \times \left(\frac{a1 + an}{2}\right) \times n$$

A expressão fica, então:

$$DT = S \times id \times n \times \left(\frac{a1 + an}{2}\right) \quad (8)$$

Onde: $\frac{a1 + an}{2}$ representa o prazo médio.

No caso de desconto bancário simples de títulos de mesmo valor com vencimentos periódicos sucessivos a partir do primeiro vencimento, existem algumas simplificações:

a1 = 1
an = n

Isso se deve ao fato dos títulos terem vencimentos sucessivos e periodicidade constante a partir do primeiro. A expressão para o cálculo do desconto total fica, nesse caso:

$$DT = S \times id \times n \times \left(\frac{1 + n}{2}\right) \quad (9)$$

Um cuidado muito importante que se deve ter ao usar essa fórmula é que a unidade de tempo do período de capitalização da taxa deve ser igual à dos períodos sucessivos, isto é: taxa expressa em mês, período em mês; taxa expressa em semestre, período em semestre, etc.

Exemplos:

1. Calcular o valor do desconto bancário simples de seis títulos no valor de Cr$ 2.400,00 cada um, com vencimento a cada trinta dias, respectivamente, sendo que a taxa de desconto cobrada pelo banco é de 14,00% a.m.

Dados:

S = 2.400,00
id = 14,00% a.m.
n = 6
DT = ?

$$DT = S \times id \times n \times \left(\frac{1 + n}{2}\right)$$

$$DT = 2.400,00 \times 0,14 \times 6 \times \left(\frac{1 + 6}{2}\right)$$

$$DT = 7.056,00$$

2. Quatro duplicatas no valor de Cr$ 40.000,00 cada uma, com vencimentos para noventa, 120, 150 e 180 dias, são apresentadas para desconto. Se o banco está cobrando uma taxa de 13,00% a.m., qual é o valor do desconto?

Dados:

S = 40.000,00
id = 13,00% a.m.
n = 4
a1 = 90 dias = 3 meses
an = 180 dias = 6 meses
P = ?

$$DT = S \times id \times n \times \left(\frac{a1 + an}{2}\right) = 40.000,00 \times 0,13 \times 4 \times \left(\frac{3 + 6}{2}\right)$$

$$DT = 93.600,00$$

$$P = S - DT = 4 \times 40.000,00 - 93.600,00 = 66.400,00$$

5.4 Taxa média e prazo médio para operações de desconto bancário simples

5.4.1 Taxa média

A determinação da taxa média de desconto é feita com base num cálculo em que as taxas de desconto são ponderadas pelos prazos e valores nominais dos títulos, o que nos leva à seguinte expressão:

$$\text{Taxa média} = \overline{id} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times idj \times nj}{\sum_{j=1}^{m} Sj \times nj} \qquad (10)$$

m = número de títulos

Onde j = 1,2, ..., m, representando cada um dos títulos apresentados. O numerador da expressão fornece o valor dos descontos.

Vamos resolver um exercício para fixação do conceito.

Sejam três títulos de Cr$ 8.000,00, Cr$ 10.000,00 e Cr$ 12.000,00 com prazos de quatro, três e dois meses, e descontados às taxas de 8,00%, 9,00% e 10,00% ao mês, respectivamente. Calcular a taxa média.

Usando a expressão (10), temos:

$$\overline{id} = \frac{\sum_{j=1}^{3} Sj \times idj \times nj}{\sum_{j=1}^{3} Sj \times nj}$$

$$\overline{id} = \frac{8.000,00 \times 0,08 \times 4 + 10.000 \times 0,09 \times 3 + 12.000,00 \times 0,1 \times 2}{8.000,00 \times 4 + 10.000,00 \times 3 + 12.000,00 \times 2}$$

$\overline{id}$ = 0,089069767 ao mês ou 8,91% ao mês

Essa taxa média significa que, se os três títulos fossem descontados a 8,91% a.m., produziriam um valor de desconto igual ao que seria obtido caso fossem descontados às taxas de 8,00%, 9,00% e 10,00% ao mês, respectivamente.

Mostraremos, a seguir, a validade do anteriormente observado.

• Valor calculado com base nos valores nominais, prazos e taxas de cada título

1° títuloD1 = S1 x id1 x n1 =	8.000,00 x 0,08 x 4	= 2.560,00
2° títuloD1 = S1 x id2 x n2 =	10.000,00 x 0,09 x 3	= 2.700,00
3° títuloD3 = S3 x id3 x n3 =	12.000,00 x 0,10 x 2	= 2.400,00
Total = DT = D1 + D2 + D3 =		7.660,00

• Valor calculado com base na taxa média d = 0,0891

1° título D1 =	8.000,00 x 0,0890698 x 4	= 2.850,23
2° títuloD2 =	10.000,00 x 0,0890698 x 3	= 2.672,09
3° títuloD3 =	12.000,00 x 0,0890698 x 2	= 2.137,68
Total DT = D1 + D2 + D3 =		7.660,00

5.4.2 Prazo médio

O prazo médio é determinado com base num cálculo em que os prazos são ponderados pelos valores nominais e pelas taxas de desconto, como segue:

$$\text{Prazo médio} = n = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times idj \times nj}{\sum_{j=1}^{m} Sj \times nj} \qquad (11)$$

m = número de títulos

Usando os dados do exemplo anterior, vamos calcular o prazo médio:

$$\bar{n} = \frac{8.000{,}00 \times 0{,}08 \times 4 + 10.000 \times 0{,}09 \times 3 + 12.000{,}00 \times 0{,}1 \times 2}{8.000{,}00 \times 0{,}08 + 10.000{,}00 \times 0{,}09 + 12.000{,}00 \times 0{,}1}$$

$$= 2{,}795620438 \text{ meses ou } 2{,}7956 \text{ meses}$$

Para comprovação da validade do resultado obtido, é necessário que o valor do desconto total, calculado com base nesse prazo médio, na taxa e nos valores nominais, seja igual ao desconto total calculado com base nos valores nominais, prazos e taxas específicas para cada título.

1° títuloD1 = S1 x id1 x n =	8.000,00 x 0,08 x2,7956204 =	1.789,20
2° títuloD2 = S2 x id2 x n =	10.000,00 x 0,09 x2,7956204 =	2.156,06
3° títuloD3 = S3 x id3 x n =	12.000,00 x 0,10 x2,7956204 =	3.354,74
Total Dt = D1 + D2 + D3 =		7.660,00

5.4.3 Cálculo do prazo médio e da taxa média, quando uma das variáveis já é conhecida

Se conhecemos previamente a taxa média ou o prazo médio, podemos simplificar o cálculo da outra variável usando a propriedade dos somatórios, que diz que o somatório do produto de uma variável vezes uma constante é igual à constante multiplicada pelo somatório da variável. Temos, assim, duas possibilidades:

• A taxa média $\bar{id}$ já é conhecida previamente, e o que se quer é determinar o prazo médio $\bar{n}$

$\bar{id}$ = 0,0890698 ao mês = 0,0891 ao mês

$$\bar{n} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times \bar{id} \times nj}{\bar{id} \times \sum_{j=1}^{m} Sj \times nj} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times nj}{\sum_{j=1}^{m} Sj \times \bar{id}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times nj}{\bar{id} \times \sum_{j=1}^{m} Sj}$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times nj}{\sum_{j=1}^{m} Sj} \qquad (12)$$

m = número de títulos

A título de aplicação, vamos usar os dados do exemplo anterior para calcular o prazo médio:

$$\bar{n} = \frac{8.000{,}00 \times 4 + 10.000{,}00 \times 3 + 12.000{,}00 \times 2}{8.000{,}00 + 10.000{,}00 + 12.000{,}00}$$

$\bar{n}$ = 2,86667 ou 2,87 meses

Para comprovar que o prazo assim obtido é correto, é necessário que o valor do desconto total, calculado com base nesse prazo médio, na taxa média e nos valores nominais de cada título, seja igual ao desconto total já calculado.

D1 = 8.000,00 x 0,0890698 x 2,86667 = 2.042,67
D2 = 10.000,00 x 0,0890698 x 2,86667 = 2.553,34
D3 = 12.000,00 x 0,0890698 x 2,86667 = 3.064,00

DT = D1 + D2 + D3 7.660,01

A diferença deve-se a problemas de arredondamento.

• O prazo médio $\bar{n}$ é conhecido previamente, e o que se quer é determinar a taxa média id

$\bar{n}$ = 2,7956204 meses

$$\bar{id} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times idj \times \bar{n}}{\sum_{j=1}^{m} Sj \times \bar{n}} = \frac{\bar{n} \times \sum_{j=1}^{m} Sj \times idj}{\bar{n} \times \sum_{j=1}^{m} Sj} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times idj}{\sum_{j=1}^{m} Sj}$$

$$\bar{id} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sj \times idj}{\sum_{j=1}^{m} Sj} \qquad (13)$$

m = número de títulos

$$\overline{id} = \frac{8.000,00 \times 0,08 + 10.000,00 \times 0,09 + 12.000,00 \times 0,1}{8.000,00 + 10.000,00 + 12.000,00}$$

$\overline{id}$ = 0,091333 a.m. ou 9,13% a.m.

Para comprovar que a taxa média assim obtida é correta, é necessário que o valor do desconto total calculado com base nessa taxa média, prazo médio e nos valores nominais específicos para cada título, seja igual ao desconto total já calculado.

D1 = 8.000,00 x 0,0913333 x 2,7956204 = 2.042,67
D2 = 10.000,00 x 0,0913333 x 2,7956204 = 2.553,33
D3 = 12.000,00 x 0,0913333 x 2,7956204 = 3.064,00

Total DT = D1 + D2 + D3 = 7.660,00

No caso de termos conhecimento do prazo médio e da taxa média, a expressão de desconto total fica sendo:

$$DT = \sum_{j=1}^{m} Sj \times \overline{id} \times \overline{n} = \overline{id} \times \overline{n} \times \sum_{j=1}^{m} Sj$$

$$DT = \overline{id} \times \overline{n} \times \sum_{j=1}^{m} Sj \qquad (14)$$

m = número de títulos

Essa expressão é similar à utilizada para desconto de um só título: D = S x id x n.

5.4.4 Cálculo da taxa efetiva de custo da operação com utilização de prazo médio e taxa média

Através dos dados obtidos no último item, taxa média = $\overline{id}$ = 0,091333333 a.m., e prazo médio = $\overline{n}$ = 2,795620438 meses, e usando a fórmula (7), vamos determinar a taxa efetiva da operação e a taxa efetiva mensal.

- **Taxa efetiva da operação**

$$ie = \frac{1}{(1 - n \times id)} - 1$$

$$ie = \frac{1}{(1 - 2,795620438 \times 0,091333333)} - 1 = 0,3429$$

ie = 34,29% para 2,795620438 meses

- **Taxa efetiva mensal da operação**

Lembrando a fórmula (1) do capítulo 4, temos:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

Dados:

ie = 34,29%
nc = 2,795620438 meses = 2,795620438 x 30 = 83,86861314 dias
nd = 30 dias

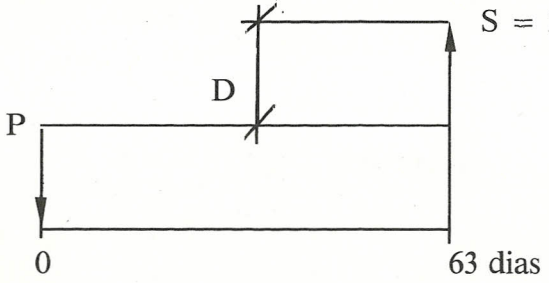
$$id = (1 + 0{,}3429)^{\frac{30}{83{,}86861314}} - 1 = 0{,}1112 \text{ a.m.}$$

A taxa efetiva mensal da operação é 11,12%.

5.5 Utilização da calculadora HP12C

Ilustraremos, através de uma série de exercícios, como podemos usar a HP12C para resolver problemas de desconto bancário simples.

1. Um cliente vai descontar duplicatas cujo valor nominal é de Cr$ 280.000,00, o prazo é de 63 dias, e a taxa de juros é de 8,50% a.m. Qual o valor do principal e quais as taxas efetivas mensal e anual?



Dados:

S = 280.000,00
id = 8,50%a.m.
n = 63 dias

— Cálculo do principal

$P = S - D$

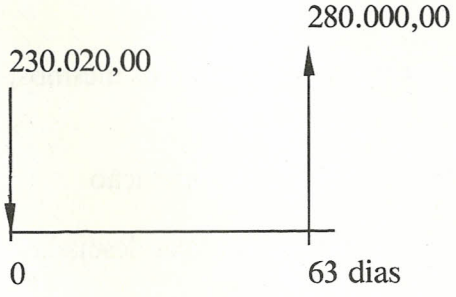
$$D = S \times id \times n = 280.000{,}00 \times 0{,}085 \times \frac{63}{30} = 49.980{,}00$$

$P = 280.000{,}00 - 49.980{,}00 = 230.020{,}00$

Na HP12C:

280.000,00	**ENTER**	
0,085	**x**	
63	**x**	
30	÷	49.980,00 → Valor do desconto
CHS		
280.000,00	+	230.020,00 → Valor do principal

5.5.1 Determinação da taxa efetiva com utilização da rotina financeira



Lembrando a relação:

$$n = \frac{\text{Período da operação}}{\text{Período da taxa desejada}}$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
230.020,00	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
280.000,00	**FV**	Valor futuro

• **Taxa efetiva mensal**

63	**ENTER**	Período da operação
30	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz o valor da relação na tecla n
i ⟶	9,82 a.m.	⟶ Taxa efetiva mensal

• **Taxa efetiva anual**

Como os dados do fluxo de caixa continuaram os mesmos, basta alterar o valor de n:

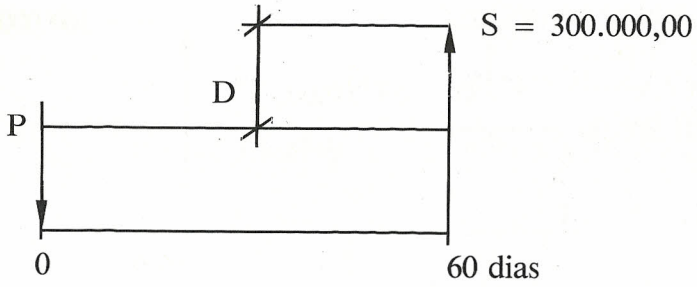
63	**ENTER**	Período da operação
360	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz o novo valor da relação na tecla n
i ⟶	207,58%	⟶ Taxa efetiva anual

2. Um cliente fará um empréstimo pessoal descontando uma nota promissória de Cr$ 300.000,00 com uma taxa de 9,80% a.m. (9,40% do banco, e 0,40% de IOC).

Sabendo que o prazo da operação é de noventa dias, calcular o valor líquido recebido e as taxas efetivas mensal, semestral e anual, do ponto de vista do cliente e do banco.

Dados:
S = 300.00,00
id = 9,80% a.m.
n = 90 dias

• **Do ponto de vista do cliente**



$D = S \times id \times n$

$$D = 300.000,00 \times 0,098 \times \frac{90}{30} = 88.200,00$$

$D = 88.200,00$

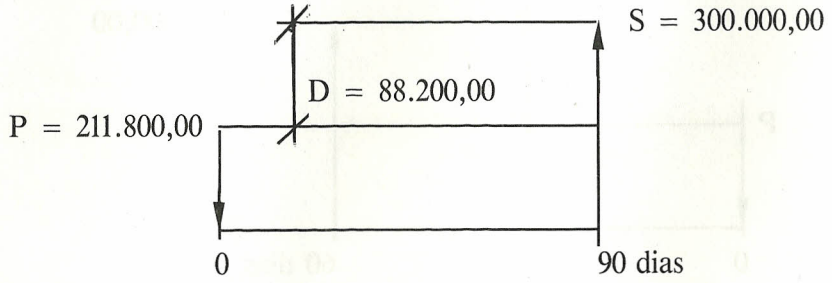
$P = S - D = 300.000,00 - 88.200,00 = 211.800,00$

Na HP12C:

300.000,00	**ENTER**	
0,0980	**x**	
90	**x**	
30	÷	⟶ 88.200,00 ⟶ Valor do

		desconto
CHS		
300.000,00	+	211.800,00 → Valor do principal

• Determinação das taxas efetivas mensal, semestral e anual com utilização da rotina financeira



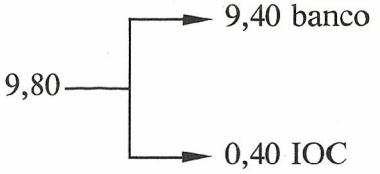
Lembrando a relação:

$$n = \frac{\text{Período da operação}}{\text{Período da taxa desejada}}$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
211.800,00	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
300.000,00	**FV**	Valor futuro
90	**ENTER**	Período da operação
30	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz o valor da relação para calcular a taxa efetiva mensal na tecla n
i	→ 12,30	→ Taxa efetiva mensal
90	**ENTER**	Período da operação
180	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz o valor da relação para calcular a taxa efetiva semestral na tecla n
i	→ 100,62	→ Taxa efetiva semestral
90	**ENTER**	Período da operação
360	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz o valor da relação para calcular a taxa efetiva anual na tecla n
i	→ 302,51	→ Taxa efetiva anual

• Do ponto de vista do banco

Decompondo a taxa, temos:



— Valor do desconto

$$D = S \times id \times n$$

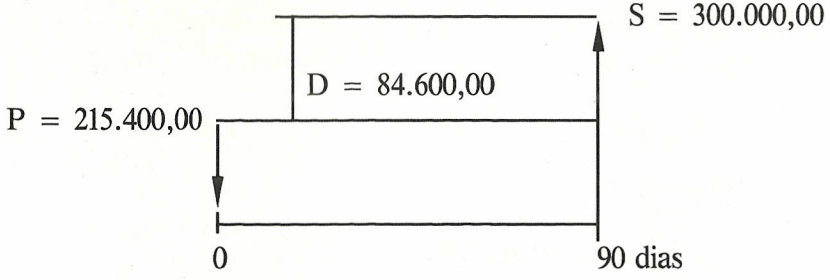
$$D = 300.000,00 \times 0,094 \times \frac{90}{30} = 84.600,00$$

— Valor líquido desembolsado pelo banco

$$P = S - D = 300.000,00 - 84.600,00 = 215.400,00$$

Na HP12C:

300.00,00	**ENTER**	
0,094	**x**	
90	**x**	
30	÷	⟶ 84.600,00. Valor do desconto
CHS		
300.000,00	+	⟶ 215.400,00. Valor do principal



Lembrando a relação:

$$n = \frac{\text{Período da operação}}{\text{Período da taxa desejada}}$$

f	CLEAR FIN	Limpa os registradores financeiros
215.400,00	**CHS PV**	Valor atual com sinal de fluxo de caixa
300.000,00	**FV**	Valor futuro
90	**ENTER**	Período da operação
30	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz na tecla n o valor da relação para calcular a taxa efetiva mensal
i	⟶ 11,68	⟶ Taxa efetiva mensal
90	**ENTER**	Período da operação
180	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz na tecla n o valor da relação para calcular a taxa efetiva semestral
i	⟶ 93,98	⟶ Taxa efetiva semestral
90	**ENTER**	Período da operação
360	÷	Período da taxa desejada
n		Introduz na tecla n o valor da

relação para calcular a taxa efetiva anual

i ⟶ 276,27 ⟶ Taxa efetiva anual

Esse exemplo serve para dar uma idéia de como o imposto e taxas (se existem) interferem, em termos de taxa efetiva. Nesse caso, uma incidência de 0,40% a.m. de IOC faz com que a taxa efetiva anual passe de 276,27% para 302,51% a.a.

5.6 Exercícios de fixação

1. Qual o valor do desconto bancário de um título de Cr$ 300.000,00 com vencimento para 93 dias, se a taxa é de 16,00% a.m.?

Resposta: O valor do desconto é de Cr$ 148.800,00

2. Qual a taxa mensal de desconto bancário utilizada numa operação de 128 dias cujo valor de resgate é de Cr$ 1.000.000,00 e cujo valor atual é de Cr$ 650.000,00?

Resposta: O valor da taxa mensal é de 8,20% a.m.

3. Uma duplicata no valor de Cr$ 6.800.000,00 é descontada por um banco, gerando um crédito de Cr$ 5.200.000,00 na conta do cliente. Sabendo-se que a taxa cobrada pelo banco é de 6,50% a.m., determinar o prazo de vencimento da duplicata.

Resposta: O prazo é de 3,62 meses

4. Um banco oferece a uma empresa um desconto de duplicata no valor de Cr$ 1.200.000,00. A taxa de desconto é de 16,00% a.m., e a alíquota de IOC é de 0,0041% a.d.

a. Qual o valor creditado na conta corrente da empresa, e qual a taxa efetiva da operação para um prazo de resgate de 92 dias?
b. Qual a taxa efetiva mensal da operação?

Resposta: a. O valor creditado é de Cr$ 606.673,60
b. A taxa efetiva mensal é de 24,91%

5. Um banco creditou a uma empresa Cr$ 1.800.000,00 referentes a um desconto de duplicatas. Se o prazo da operação foi de 94 dias, e a taxa efetiva, de 18,00% a.m., qual o montante descontado?

Resposta: O montante descontado foi de Cr$ 3.023.450,03

6. Um banco credita a uma empresa Cr$ 500.000,00 referentes a um desconto de duplicatas. Sabendo-se que o prazo da operação foi de 87 dias, e a taxa efetiva, de 19,00% a.m., determinar o valor do desconto e a taxa diária de desconto.

Resposta: O valor do desconto é de Cr$ 328.049,30, e a taxa diária de desconto é de 0,45537%

7. Determinar o valor nominal ou de face de um título com prazo de vencimento para daqui a 120 dias, o qual, descontado a uma taxa de 128,00% a.a., proporcionou um crédito de Cr$ 400.000,00.

Resposta: O valor de face é de Cr$ 697.674,42

8. Uma empresa desconta três títulos no valor de Cr$ 90.000,00 cada um, com vencimento em trinta, sessenta e noventa dias, respectivamente. Sabendo-se que a taxa de desconto cobrada pelo banco é de 15,00% a.m., calcular o valor do desconto total e o valor líquido obtido pela empresa.

Resposta: O valor do desconto total é de Cr$ 81.000,00

O valor líquido obtido é de Cr$ 189.000,00

9. Usando os dados do exercício anterior, calcular o valor do desconto e o valor líquido obtido, supondo que o vencimento dos títulos fosse sessenta, noventa e 120 dias, respectivamente.

Resposta: O valor do desconto total é de Cr$ 121.150,00
O valor líquido obtido é de Cr$ 148.500,00

10. Sejam quatro títulos nos valores de Cr$ 20.000,00, Cr$ 25.000,00, Cr$ 30.000,00 e Cr$ 35.000,00, com prazos de três, quatro, dois e um meses, respectivamente, descontados às taxas de 9,00% a.m., 11,00% a.m., 14,00 a.m. e 17,00% a.m. Calcular:

a. Prazo médio
b. Taxa média de desconto

Resposta: a. O prazo médio é 2,0918367 meses
b. A taxa média de desconto é 12,06% a.m.

11. Sejam três títulos nos valores de Cr$ 100.000,00, Cr$ 120.000,00 e Cr$ 140.000,00, com prazo de quatro, três e dois meses, respectivamente, e taxa média de desconto de 14,00% a.m. Determinar o prazo médio.

Resposta: O prazo médio é 2,8889 meses

12. Sejam quatro títulos nos valores de Cr$ 50.000,00, Cr$ 70.000,00, Cr$ 90.000,00 e Cr$ 110.000,00, com taxas de desconto de 10,00% a.m., 11,00% a.m., 8,50% a.m. e 13,50 a.m., respectivamente. Sendo o prazo médio de desconto é de 2,76 meses, determinar a taxa média de desconto.

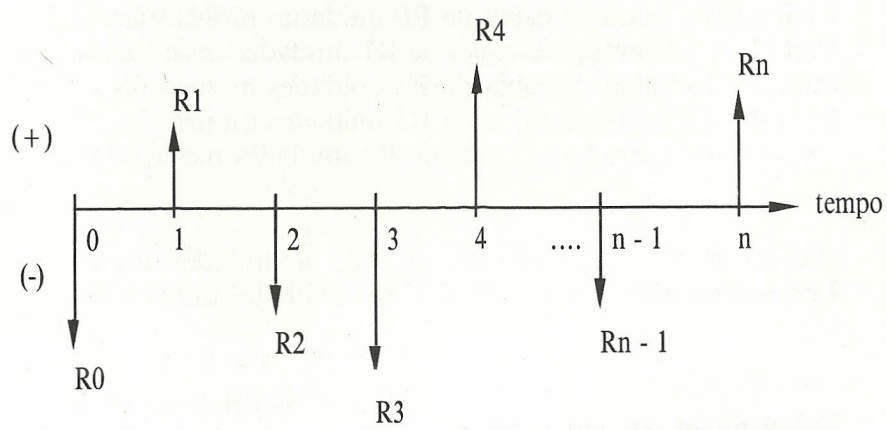
Resposta: A taxa média de desconto é de 11,00% a.m.

CAPÍTULO 6

Fluxos de caixa

6.1 Conceito de fluxo de caixa

Muitas vezes, ao trabalhar com a matemática financeira, deparamo-nos com gráficos desse tipo:



Trata-se de um diagrama de fluxo de caixa, que conceitualmente pode ser definido como uma descrição gráfica, temporal e direcional das transações financeiras. Vejamos:

- Gráfica - Porque é feita na forma de gráfico.
- Temporal - Porque possui um eixo orientado indicando o sentido para onde o tempo avança, cuja unidade pode ser horas, dias, meses, anos, etc.
- Direcional - Porque as transações financeiras são representadas por setas perpendiculares ao eixo orientado, com a seguinte convenção geralmente aceita:

  - Sinal positivo (+) - Seta apontando para cima = entradas de caixa.
  - Sinal negativo (-) - Seta apontando para baixo = saídas de caixa

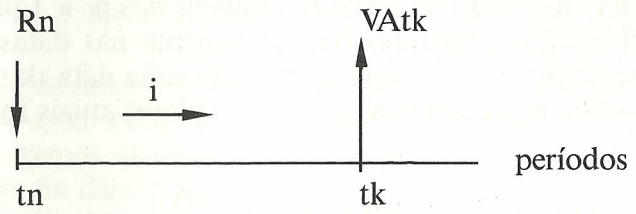
No diagrama acima podemos dizer que houve:

Período 0 - Saída de caixa de R0 unidades monetárias.
Período 1 - Entrada de caixa de R1 unidades monetárias.
Período 2 - Saída de caixa de R2 unidades monetárias.
Período 3 - Saída de caixa de R3 unidades monetárias.
Período 4 - Entrada de caixa de R4 unidades monetárias.
" "
" "
Período n - 1 - Saída de caixa de Rn - 1 unidades monetárias
Período n - Entrada de caixa de Rn unidades monetárias.

6.2 Valor atual de um capital

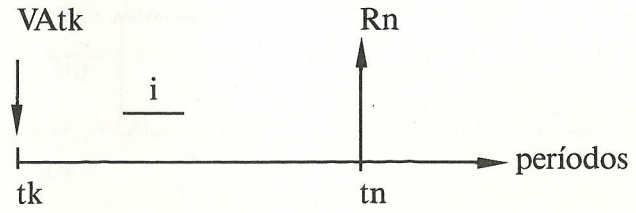
Seja Rn o valor nominal de um pagamento ou recebimento incidente em uma data tn. O valor atual de Rn em uma data tk, a taxa i de juros compostos, sendo tk $\geq$ tn, é o montante obtido

por Rn no regime de juros compostos a uma taxa i durante (tk - tn) períodos.



$$VA_{tk} = Rn\,(1 + i)^{tk - tn} \qquad (1)$$

Por outro lado, se tk $\leq$ tn, teríamos a seguinte expressão:



$$VAtk = \frac{Rn}{(1 + i)^{tn - tk}} = Rn\,(1 + i)^{tk - tn}$$

$$VA_{tk} = Rn\,(1 + i)^{tk - tn} \qquad (2)$$

A expressão (2) é idêntica à (1). Podemos, portanto, a partir desse fato, concluir que, sendo tk tn ou tk tn, a expressão é sempre a mesma.

6.3 Equivalência de capitais

Sejam R0, R1, R2, ... Rn os valores nominais dos n + 1 pagamentos ou recebimentos incidentes respectivamente nas datas t0, t1, t2,... tn. Esses capitais serão equivalentes em uma data tk para uma mesma taxa i de juros compostos, se seus valores atuais forem iguais na data tk.

Para R0, teremos: $VA_{tk} = R0\ (1 + i)^{tk - t0}$

Para R1, teremos: $VA_{tk} = R1\ (1 + i)^{tk - t1}$

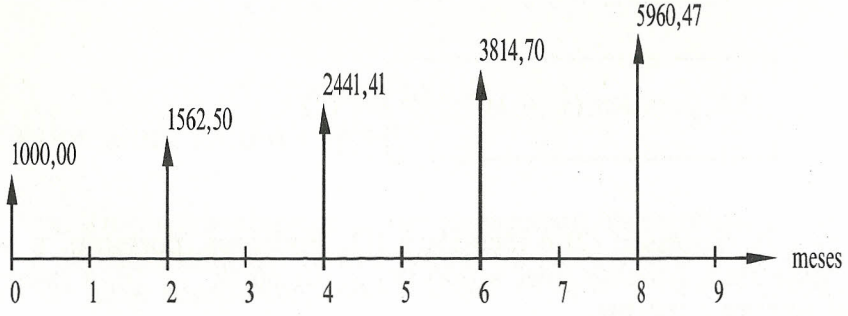
Para Rn, teremos: $VA_{tk} = Rn\ (1 + i)^{tk - tn}$

Para que estes capitais sejam equivalentes, deverá ser verificada a seguinte igualdade:

$$R0\ (1 + i)^{tk - t0} = R1\ (1 + i)^{tk - t1} = \ldots$$
$$\ldots = Rn\ (1 + i)^{tk - tn} \qquad (3)$$

Exemplos:

1. Determinar se os recebimentos do fluxo de caixa a seguir são equivalentes na data tk = cinco meses à taxa de juros compostos de 25,00% a.m.



$1.000,00\ (1 + 0,25)^{5 - 0} = 1.562,50\ (1 + 0,25)^{5 - 2} =$
$= 2.441,41\ (1 + 0,25)^{5 - 4} = 3.814,70\ (1 + 0,25)^{5 - 6} =$
$= 5.960,47\ (1 + 0,25)^{5 - 8} = 3.051,76$

Podemos ver, então, que os capitais são equivalentes na data tk = cinco meses à taxa de 25,00% a.m.

Vamos demonstrar, agora, que, se n + 1 capitais são equivalentes na data t = tk a uma taxa i de juros compostos, o são em qualquer data t = ty.

• Hipótese: Sejam R0, R1, R2, ..., Rn, n + 1 capitais equivalentes na data t = tk a uma dada taxa i de juros compostos.

• Tese: Se são equivalentes na data t = tk, o são para qualquer data t = ty.

• Demonstração: Se os capitais são equivalentes para uma data tk a uma dada taxa i de juros compostos, seus valores atuais são iguais, e pela definição de equivalência temos:

$$R0\ (1 + i)^{tk - t0} = R1\ (1 + i)^{tk - t1} = \ldots$$
$$\ldots = Rn\ (1 + i)^{tk - tn} \qquad (4)$$

Se multiplicamos todos os membros dessa igualdade por um mesmo número, ela não se altera. Seja, então, $(1 + i)^{ty - tk}$ este número:

$$R0\ (1 + i)^{tk - t0}\ (1 + i)^{ty - tk} =$$
$$= R1\ (1 + i)^{tk - t1}\ (1 + i)^{ty - tk} = \ldots$$
$$\ldots = Rn\ (1 + i)^{tk - tn}\ (1 + i)^{ty - tk}$$

Usando-se a propriedade de que, para multiplicar potências de igual base, somam-se os expoentes e mantém-se a base:

$$R0\,(1 + i)^{tk - t0 + ty - tk} = R1\,(1 + i)^{tk - t1 + ty - tk} = \ldots$$
$$\ldots = Rn\,(1 + i)^{tk - tn + ty - tk}$$

$$R0\,(1 + i)^{ty - t0} = R1\,(1 + i)^{ty - t1} = \ldots \quad (5)$$
$$\ldots = Rn\,(1 + i)^{ty - tn}$$

A expressão (5) nada mais é do que a demonstração de que os capitais são equivalentes na data t = ty.

Se os capitais são equivalentes para uma data t = tk, o são, conseqüentemente, para uma data t = ty qualquer.

2. Com utilização dos dados do fluxo de caixa anterior, verificar se os capitais são equivalentes à taxa de juros compostos de 25,00% a.m, na data tk de três meses.

$$1.000,00\,(1 + 0,25)^{3 - 0} = 1.562,50\,(1 + 0,25)^{3 - 2} =$$
$$= 2.441,41\,(1 + 0,25)^{3 - 4} = 3.814,70\,(1 + 0,25)^{3 - 6} =$$
$$= 5.960,47\,(1 + 0,25)^{3 - 8} = 1.953,13$$

Os capitais são equivalentes na data tk = três meses à taxa de 25,00% a.m., resultado previsível, pois os mesmos são equivalentes na data tk = cinco meses à taxa de 25,00% a.m.

6.4 Valor atual de um fluxo de caixa

Sejam R0, R1, R2, ..., Rn os valores nominais dos n + 1 pagamentos ou recebimentos incidentes respectivamente nas datas t0, t1, t2, ..., tn de um fluxo de caixa A. O valor atual desse fluxo de caixa em uma data tk qualquer a uma dada taxa i de juros compostos é igual à soma algébrica dos valores atuais de cada pagamento ou recebimento na data tk à taxa i de juros compostos.

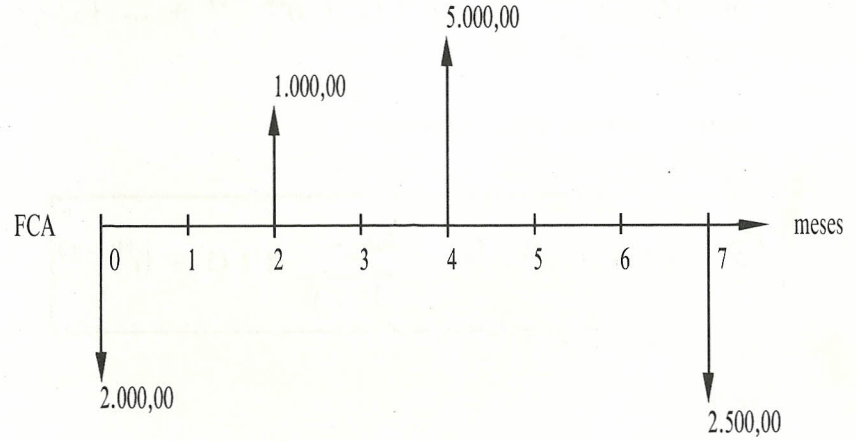
$$VA_{FCA,\,tk} = R0\,(1 + i)^{tk - t0} + R1\,(1 + i)^{tk - t1} + \ldots +$$
$$+ Rn\,(1 + i)^{tk - tn}$$

Usando o conceito de somatório, chegamos à expressão:

$$VA_{FCA,\,tk} = \sum_{s\,=\,0}^{n} Rs\,(1 + i)^{tk - ts} \quad (6)$$

Exemplo:

Determinar o valor atual do fluxo de caixa A, considerando uma taxa i = 15,00% a.m. de juros compostos na data tk = três meses.



$$VA_{FCA,\,tk\,=\,3} = -2.000,00\,(1 + 0,15)^{3 - 0} +$$
$$+ 1.000,00\,(1 + 0,15)^{3 - 2} +$$
$$+ 5.000,00\,(1 + 0,15)^{3 - 4} -$$
$$- 2.500,00\,(1 + 0,15)^{3 - 7}$$

$$VA_{FCA,\,tk\,=\,3} = 1.026,69$$

6.5 Equivalência de fluxos de caixa

Sejam R0, R1, ... Rn os valores nominais dos n + 1 pagamentos ou recebimentos incidentes respectivamente nas datas t0, t1, ..., tn de um fluxo de caixa A, e sejam R'0, R'1, ... R'm os valores nominais dos m + 1 pagamentos ou recebimentos nas datas t0, t1, ... tm de um fluxo de caixa B.

Os fluxos de caixa A e B são equivalentes em uma data tk, para uma mesma taxa i de juros compostos, se seus valores atuais são iguais na data tk.

$$VA_{FCA,\ tk} = VA_{FCB,\ tk}$$

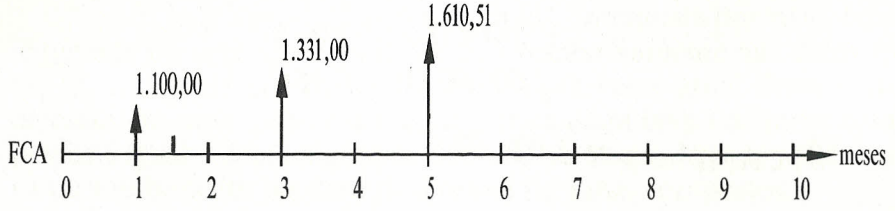
$$R0\,(1 + i)^{tk - t0} + R1\,(1 + i)^{tk - t1} + \ldots + Rn\,(1 + i)^{tk - tn} =$$
$$= R'0\,(1 + i)^{tk - t0} + R'1\,(1 + i)^{tk - t1} + \ldots +$$
$$+ R'm\,(1 + i)^{tk - tm}$$

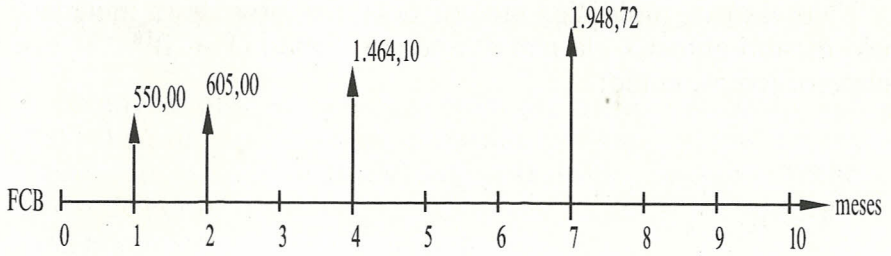
Usando o somatório, teremos:

$$\sum_{j=0}^{n} Rj\,(1 + i)^{tk - tj} = \sum_{1=0}^{m} R'1\,(1 + i)^{tk - t1} \qquad (7)$$

Exemplo:

Determinar se os fluxos de caixa A e B são equivalentes à taxa de 10,00% a.m. na data tk = cinco meses.





$$VA_{FCA,\ tk = 5} = 1.100,00\,(1 + 0,1)^{5 - 1} +$$
$$+ 1.331,00\,(1 + 0,1)^{5 - 3} + 1.610,51\,(1 + 0,1)^{5 - 5}$$

$$VA_{FCA,\ tk = 5} = 4.831,53$$

$$VA_{FCB,\ tk = 5} = 550,00\,(1 + 0,1)^{5 - 1} +$$
$$+ 605,00\,(1 + 0,1)^{5 - 2} + 1.464,10\,(1 + 0,1)^{5 - 4} +$$
$$+ 1.948,72\,(1 + 0,1)^{5 - 7}$$

$$VA_{FCB,\ tk = 5} = 4.831,53$$

Conseqüentemente, $VA_{FCA,\ tk = 5} = VA_{FCB,\ tk = 5}$, sendo então os fluxos de caixa equivalentes na data tk = cinco meses.

A seguir, vamos demonstrar que, se dois fluxos de caixa são equivalentes numa data t = tk, o são em qualquer outra data t = ty.

- **Hipótese:** Os fluxos de caixa A e B são equivalentes em uma data t = tk a uma data taxa i de juros compostos.

- **Tese:** Sendo equivalentes na data t = tk, o são igualmente em uma data t = ty qualquer.

- **Demonstração:**

Se são equivalentes na data t = tk, a relação (7) é válida:

$$\sum_{j=0}^{n} Rj\,(1 + i)^{tk - tj} = \sum_{1=0}^{m} R'1\,(1 + i)^{tk - t1}$$

No caso de multiplicarmos os dois membros dessa igualdade pelo mesmo número, ela não se alterará. Sendo $(1 + i)^{tk - ty}$ esse número, temos, então:

$$\sum_{j=0}^{n} Rj\,(1 + i)^{tk - tj}\,(1 + i)^{ty - tk} =$$

$$= \sum_{1=0}^{m} R'1\,(1 + i)^{tk - t1}\,(1 + i)^{ty - tk}$$

Segundo a propriedade de que, para multiplicarmos potências de igual base, somam-se os expoentes e mantém-se a base:

$$\sum_{j=0}^{n} Rj\,(1 + i)^{tk - tj + ty - tk} =$$

$$= \sum_{1=0}^{m} R'1\,(1 + i)^{tk - t1 + ty - tk}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} Rj\,(1 + i)^{ty - tj} = \sum_{1=0}^{m} R'1\,(1 + i)^{ty - t1}} \qquad (8)$$

A igualdade (8) nada mais é do que a expressão que prova que os valores atuais dos fluxos de caixa A e B são iguais na data t = ty, sendo, por conseguinte, os fluxos equivalentes à taxa i de juros compostos dada. A conclusão é que, se dois fluxos de caixa são equivalentes em uma data t = tk a uma dada taxa i de juros compostos, o são, por conseguinte, em qualquer outra data.

6.6 Utilização prática do conceito de fluxo de caixa

Entre os diversos usos que destacam a importância do conceito de fluxo de caixa estão a determinação das diversas opções de pagamento de compras financiadas, alterações da forma de pagamento de saldos devedores, consolidação de várias dívidas com valores nominais e vencimentos conhecidos, etc...

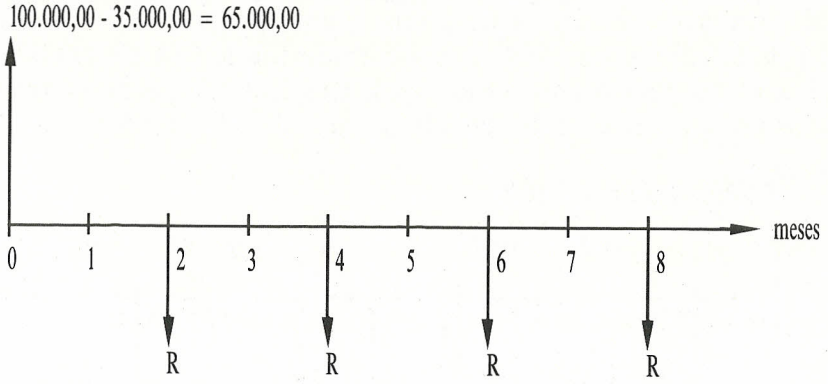
Mostraremos, através dos exemplos colocados a seguir, algumas dessas aplicações.

Exemplo 1:

Determinar o valor das quatro prestações iguais, a serem pagas no final do segundo, quarto, sexto e oitavo meses, de uma compra cujo valor à vista é de Cr$ 100.000,00. Sabendo-se que a entrada foi de Cr$ 35.000,00, e que a loja cobra uma taxa de juros compostos de 20,00% ao mês sobre o saldo devedor.

Dados:

P = 100.000,00 - 35.000,00 = 65.000,00
i = 20,00% a.m.
n = 2°, 4°, 6°, 8° meses
R = ?



Determinando o valor atual do fluxo de caixa ilustrado acima na data tk = 0 e igualando-o a zero, temos:

$$65.000,00 - R\,(1 + 0,2)^{0-2} - R\,(1 + 0,2)^{0-4} - R\,(1 + 0,2)^{0-6} - R\,(1 + 0,2)^{0-8} = 0$$

$$65.000,00 = R\,(1 + 0,2)^{0-2} + R\,(1 + 0,2)^{0-4} + R\,(1 + 0,2)^{0-6} + R\,(1 + 0,2)^{0-8}$$

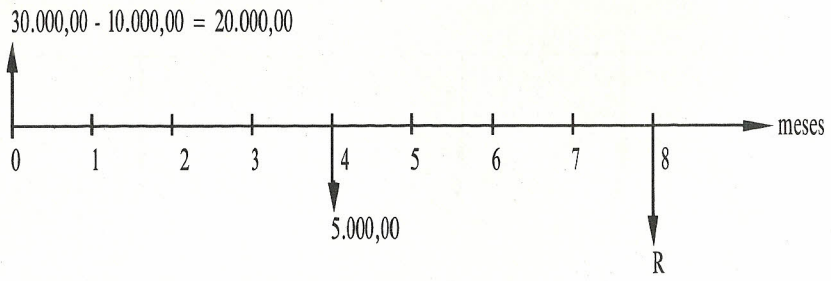
$$65.000,00 = R\left[(1 + 0,2)^{-2} + (1 + 0,2)^{-4} + (1 + 0,2)^{-6} + (1 + 0,2)^{-8}\right]$$

$$R = \frac{65.000,00}{(1 + 0,2)^{-2} + (1 + 0,2)^{-4} + (1 + 0,2)^{-6} + (1 + 0,2)^{-8}} = 37.267,15$$

O valor da prestação é de Cr$ 37.267,15.

Exemplo 2:

Determinar o valor de uma prestação que deve ser paga ao final do oitavo mês, referente a uma compra cujo valor à vista é de Cr$ 30.000,00, sabendo-se que a entrada foi de Cr$ 10.000,00, que ao final do quarto mês serão pagos Cr$ 5.000,00, e que a taxa de juros compostos cobrada pela loja é de 25,00% ao mês.



Calculando o valor atual do fluxo de caixa anterior na data tk = 0 e igualando-o a zero, temos:

$$20.000,00 - 5.000,00\,(1 + 0,25)^{0-4} - R\,(1 + 0,25)^{0-8} = 0$$

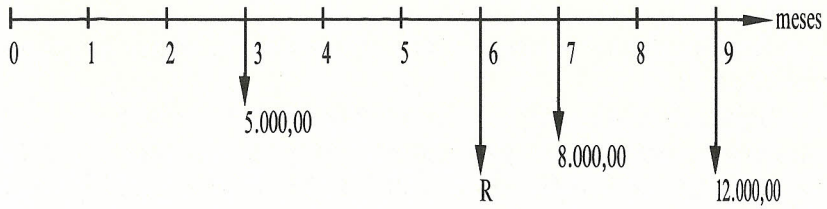
$$20.000,00 = 5.000,00\,(1 + 0,25)^{0-4} + R\,(1 + 0,25)^{0-8}$$

$$R = \frac{20.000,00 - 5.000,00\,(1 + 0,25)^{-4}}{(1 + 0,25)^{-8}} = 107.002,26$$

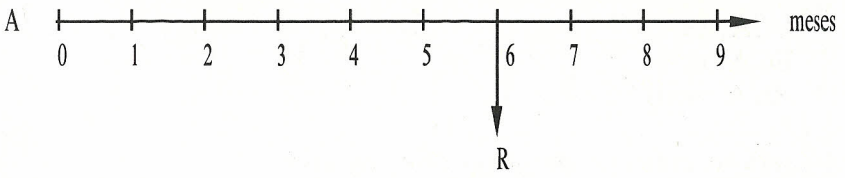
O valor da prestação a ser paga ao final do oitavo mês é de Cr$ 107.002,26

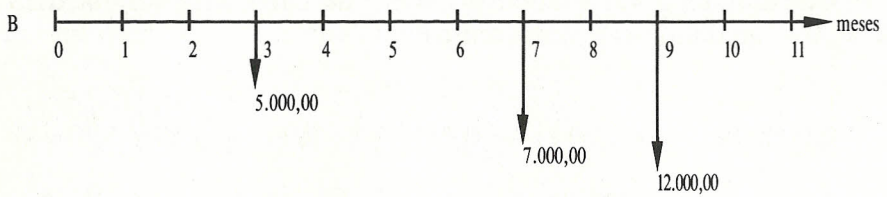
Exemplo 3:

Uma pessoa tem uma dívida a ser paga em três prestações. Uma, de Cr$ 5.000,00, ao final do terceiro mês; outra, de Cr$ 8.000,00, ao término do sétimo mês, e a última, de Cr$ 12.000,00, ao final do nono mês. A taxa cobrada pelo seu credor é de 15,00% ao mês. Se o cliente decidiu pagar a dívida em uma única prestação, ao final do sexto mês, qual o valor da prestação?



Decompondo em dois fluxos de caixa, temos:





Equivalência de fluxos de caixa na data tk = seis meses:

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ 6} = VA_{FCB,\ tk\ =\ 6}$$

$$R\ (1 + 0{,}15)^{6\ -\ 6} = 5.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{6\ -\ 3} +$$
$$+\ 7.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{6\ -\ 7} + 12.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{6\ -\ 9}$$

$$R = 5.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{3} + 7.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{-1} +$$
$$12.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{-\ 3}$$

$$R = 21.581{,}53$$

O valor da prestação é de Cr$ 21.581,53.

6.7 Taxa interna de retorno de um fluxo de caixa

É a taxa que anula o valor atual de um fluxo de caixa em uma data tk.

Sejam R0, R1, R2, ..., Rn os valores nominais dos n + 1 pagamentos ou recebimentos incidentes respectivamente nas datas t0, t1, t2, ... tn, de um fluxo de caixa A. Se o valor atual deste é nulo em uma data tk a uma dada taxa i de juros compostos, denominamos esta de taxa interna de retorno.

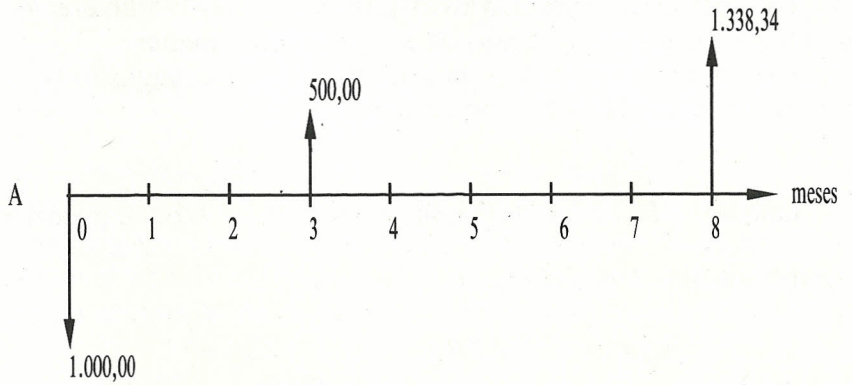
$$VA_{FCA,\ tk} = 0$$
$$VA_{FCA,\ tk} = R0\ (1 + i)^{tk\ -\ t0} + R1\ (1 + i)^{tk\ -\ t1} + \ldots +$$
$$+\ Rn\ (1 + i)^{tk\ -\ tn} = 0$$

Usando o conceito de somatório, temos:

$$VA_{FCA,\ tk} = \sum_{s\ =\ 0}^{n} Rs\ (1 + i)^{tk\ -\ ts} = 0 \qquad (9)$$

Em geral, no mercado financeiro determina-se a taxa interna de retorno na data tk = 0. O processo genérico seguido para tanto é iterativo mediante interpolações, sendo trabalhoso. Atualmente, as calculadoras já estão programadas para realizar esse cálculo automaticamente.

Determinar a taxa interna de retorno do seguinte fluxo de caixa na data tk = 0.



$$VA_{FCA,tk\ =\ 0} = -\ 1.000{,}00\ (1 + i)^{0\ -\ 0} +$$
$$+\ 500{,}00\ (1 + i)^{0\ -\ 3} + 1.338{,}34\ (1 + i)^{0\ -\ 8}$$

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ 0} = 0$$

$$-1.000,00 + \frac{500,00}{(1 + i)^3} + \frac{1.338,34}{(1 + i)^8} = 0 \qquad (10)$$

A chave do processo de interpolação consiste em obter as mudanças de sinal no primeiro membro da equação obtida. Desse modo, podemos afirmar que, sempre que há uma mudança de sinal na equação, temos um ponto de anulação no intervalo, pois o primeiro membro é uma função da variável i contínua no intervalo (0, + 00), onde vamos procurar as raízes.

Uma vez obtidas as taxas que proporcionam a mudança de sinal da equação, começamos tomando a média aritmética, e assim sucessivamente até chegar tão próximo da raiz quanto conveniente. Quando se tem uma expectativa em relação à taxa, o trabalho fica simplificado, pois o intervalo de interpolação é menor.

Vamos tentar obter a taxa interna de retorno da equação (10). Arbitrando i = 0,00% a.m., obtemos:

$$-1.000,00 + 500,00 + 1.338,34 = 838,340$$ 0 Sinal positivo

Arbitrando i = 20,00% a.m., obtemos:

$$-1.000,00 + \frac{500,00}{(1 + 0,20)^3} + \frac{1.338,34}{(1 + 0,20)^8} = -399,39$$ 0 Sinal negativo

Como podemos ver, houve uma mudança de sinal. A seguir, deve-se partir o intervalo na metade.

Arbitrando i = 10,00 a.m., obtemos

$$-1.000,00 + \frac{500,00}{(1 + 0,10)^3} + \frac{1.338,34}{(1 + 0,10)^8} = 0$$

Logo, i = 10,00% a.m. é a taxa interna de retorno do fluxo de caixa.

Para determinar a raiz da equação obtida, uma outra alternativa que pode ser usada é o algoritmo de Briot-Ruffini. Observando o primeiro membro da equação (10) e fazendo a seguinte mudança de variável, x = 1 / (1 + i), temos:

$$-1.000,00 + 500,00\,x^3 + 1.338,34\,x^8 = 0$$

Montando o dispositivo prático de Briot-Ruffini e tentando o valor x = 0,9091, teríamos uma raiz que nos permitiria chegar a i = 10,00% a.m.

6.8 Utilização da calculadora HP12C

6.8.1 Determinação da taxa interna de retorno

A calculadora HP12C possui uma rotina que permite calcular a taxa interna de retorno através de um processo iterativo, isto é, por tentativa e erro. Ela possibilita o cálculo dessa taxa na data tk = 0 através da função IRR (*Internal Rate of Return*), para até vinte grupos de fluxos de caixa diferentes (excluindo o inicial), cada grupo contendo um máximo de 99 fluxos iguais.

Os passos para introduzir os fluxos de caixa na HP12C são:

a. Pressionar **f CLEAR REG** para apagar os registradores financeiros e de armazenamento de dados.

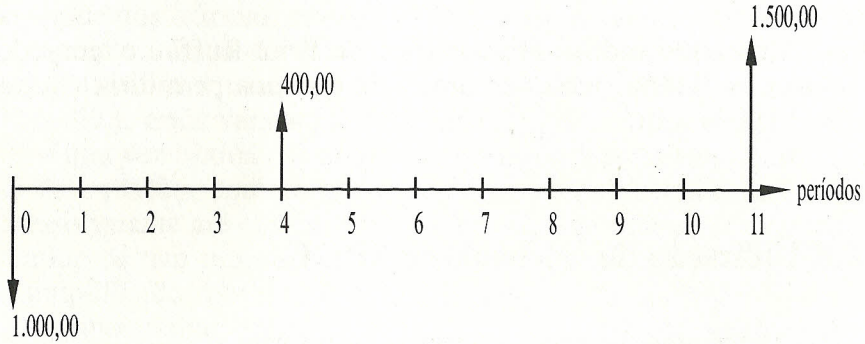
b. Introduzir o valor do fluxo de caixa inicial, pressionar **CHS**, se negativo, e então **g CFo**. Se não existir fluxo de caixa inicial, pressionar **0 g CFo**.

c. Introduzir o montante do próximo fluxo de caixa e pressionar **g CFj**. Se não houver fluxo de caixa, pressionar **0 g Cfj**.

No caso de o fluxo de caixa se repetir por mais de um período (n vezes), pressionar **n g Nj**.

d. Proceder da mesma forma até que todos os fluxos estejam inseridos.

Vamos introduzir o fluxo de caixa a seguir na **HP12C** e determinar sua taxa interna de retorno.

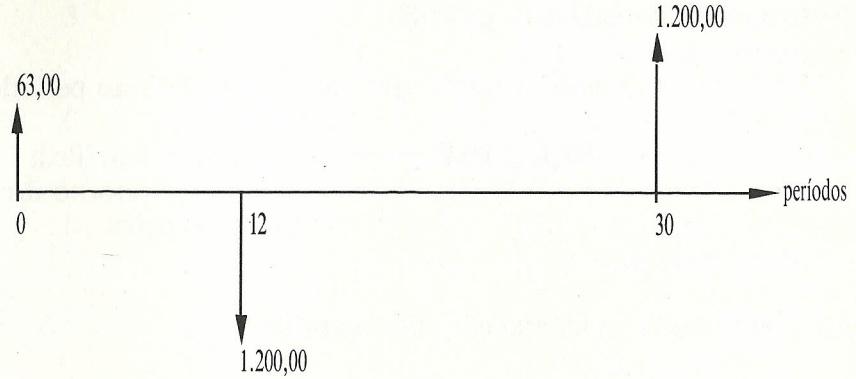


f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento de dados
1.000,00	**CHS g CFo**	Introduz o fluxo de caixa inicial
0	**g CFj**	Introduz o primeiro grupo de fluxos de caixa
3	**g Nj**	Introduz o número de vezes que este valor se repete
400,00	**g CFj**	Introduz o segundo grupo de fluxos de caixa
0	**g CFJ**	introduz o terceiro grupo de fluxos de caixa
6	**g Nj**	Introduz o número de vezes que este valor se repete

1.500,00	**g CFj**	Introduz o quarto grupo de fluxo de caixa
f	**IRR** ⟶	7,2125% a.p.Taxa interna de retorno do fluxo de caixa

É possível haver situações nas quais o cálculo é muito complexo, podendo envolver múltiplas respostas ou raízes. Nesses casos, a mensagem ERROR 3 aparece no visor da calculadora, e para que a mesma prossiga nos cálculos é necessário fornecer uma estimativa da taxa interna de retorno.

Seja calcular a taxa interna de retorno do fluxo de caixa a seguir:



f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento
63,00	**g CFo**	Introduz o fluxo de caixa inicial
0	**g CFj**	Introduz o primeiro grupo de fluxos de caixa
11	**g Nj**	Introduz o número de vezes que este valor se repete

1.200,00	**CHS g CFj**	Introduz o segundo grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Introduz o terceiro grupo
17	**g Nj**	Introduz o número de vezes que ese valor se repete
1.200,00	**g CFj**	Introduz o quarto grupo de fluxos de caixa
f	**IRR ⟶ ERROR 3**	

Para continuar o cálculo deve-se introduzir no visor uma estimativa e pressionar **RCL g PSE**.

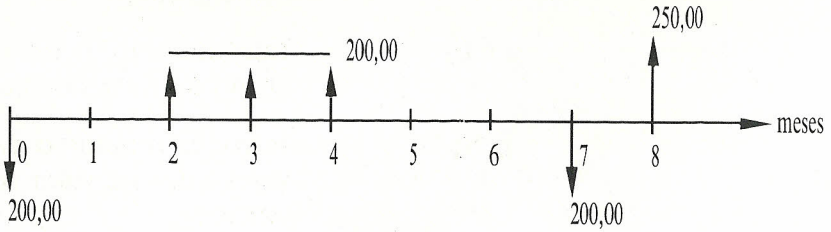
Neste caso, vamos arbitrar uma taxa de 20,00% ao período:

20	**RCL g PSE ⟶**	27,7048% a.a. Taxa interna de retorno do fluxo de caixa

6.8.2 Revisando as introduções de fluxos de caixa

A instrução g CFo armazena o valor do fluxo de caixa inicial no registrador R0, a instrução g CFJ armazena os fluxos de caixa nos registradores disponíveis R1, R2, R3, ... Rn. Sendo o número de fluxos de caixa acumulado no registrador n.

Seja o fluxo de caixa abaixo:



Para introduzir na HP12C, temos:

f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento
200,00	**CHS g CFo**	Introduz o fluxo de caixa inicial
0	**g CFj**	Introduz o primeiro grupo de fluxos de caixa
200,00	**g CFj**	Introduz o segundo grupo de fluxos de caixa
3	**g Nj**	Introduz o número de vezes que este valor se repete
0	**g CFJ**	Introduz o terceiro grupo de fluxos de caixa
2	**g Nj**	Introduz o número de vezes que este valor se repete
200,00	**CHS g CFj**	Introduz o quarto grupo de fluxos de caixa
250,00	**g CFj**	Introduz o quinto grupo de fluxos de caixa
f	**IRR ⟶**	46,0193% a.p. Taxa interna de retorno do fluxo de caixa

Para revisar as introduções, pressiona-se:

RCL0	- 200,00	Fluxo de caixa inicial
RCL1	0,00	1° grupo de fluxos de caixa
RCL2	200,00	2° grupo de fluxos de caixa

RCL3	0,00	3° grupo de fluxos de caixa
RCL4	- 200,00	4° grupo de fluxos de caixa
RCL5	250,00	5° grupo de fluxos de caixa
RCLn	5,00	Número de grupos de fluxos de caixa

Para alterar o montante de um fluxo de caixa, basta:

- Introduzir o montante no visor
- Pressionar STO
- Introduzir o índice do registrador contendo o montante do fluxo de caixa a ser alterado

Vamos alterar o quarto grupo de fluxos de caixa para - 300,00 e calcular novamente a taxa interna de retorno:

300,00	**CHS STO**	4
f	**IRR** ⟶	44,0274% a.p. Nova taxa interna de retorno de fluxo de caixa

Para alterar o número de ocorrências consecutivas de um determinado fluxo de caixa, ou seja, para alterar um Nj de um CFj:

- Armazenar o índice do montante desse fluxo de caixa (ou seja, o valor de j) no registrador **n**.
- Introduzir no visor o número de vezes consecutivas que o montante do fluxo de caixa ocorre.
- Pressionar **g Nj**.
- Recompor o valor original do registrador **n**.

Vamos alterar o número de ocorrências consecutivas do segundo grupo de fluxos de caixa para quatro e calcular a nova taxa interna de retorno.

2	**n**	Índice do fluxo de caixa a ser alterado
4	**g Nj**	Número de vezes

		consecutivas que o fluxo de caixa ocorre
5	**n**	Recompõe o valor original de n
f	**IRR** ⟶	52,2286% a.p. Nova taxa interna de retorno do fluxo de caixa

Outra maneira de revisar todos os montantes de fluxo de caixa junto com seus números de ocorrências é pressionando consecutivamente:

- **RCL g Nj**
- **RCL g CFj**

Com isso, os pares **Nj** e **Cfj** são apresentados no visor, começando com o montante do último fluxo de caixa e prosseguindo até chegar a **No** e **CFo**.

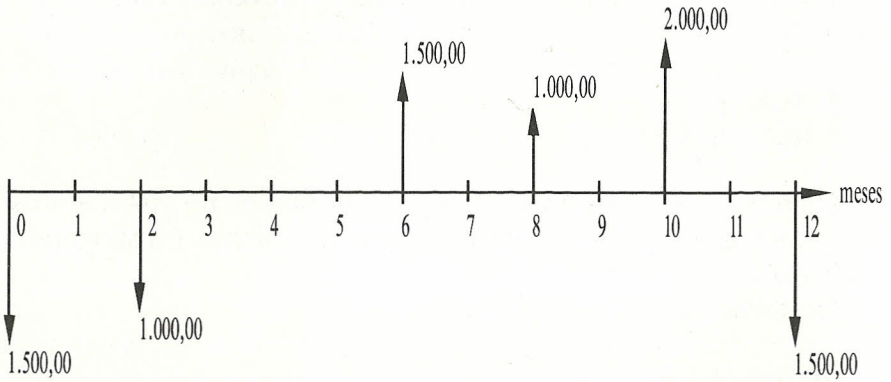
No nosso caso, temos:

RCL	g	Nj	1
RCL	g	CFj	250,00
RCL	g	Nj	1
RCL	g	CFj	- 300,00
RCL	g	Nj	2
RCL	g	CFj	0,00
RCL	g	Nj	4
RCL	g	CFj	200,00
RCL	g	Nj	1
RCL	g	CFj	0,00
RCL	g	Nj	1
RCL	g	CFj	- 200,00

6.8.3 Cálculo do valor atual de um fluxo de caixa

A calculadora HP12C possui uma função f NPV que permite calcular o valor atual de um fluxo de caixa na data tk = 0 a uma dada taxa i de juros compostos. Uma vez obtido o valor atual na data tk = 0, podemos obter o valor atual em qualquer outra data à mesma taxa i de juros compostos, pela equivalência de capitais.

Seja calcular o valor atual do fluxo de caixa a seguir na data tk = cinco meses a uma taxa de 18,00% a.m.



f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento
1.500,00	**CHS g CFo**	Valor do fluxo de caixa inicial
0	**g CFj**	Valor do primeiro grupo de fluxos de caixa
1.000,00	**CHS g CFj**	Valor do segundo grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do terceiro grupo de fluxos de caixa
3	**g Nj**	Número de vezes que este valor se repete
1.500,00	**g CFj**	Valor do quarto grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do quinto grupo de fluxos de caixa
1.000,00	**g CFj**	Valor do sexto grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do sétimo grupo de fluxos de caixa
2.000,00	**g CFj**	Valor do oitavo grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do nono grupo de fluxos de caixa
1.500,00	**CHS g CFj**	Valor do décimo grupo de fluxos de caixa
18	**i**	Introduz a taxa de juros mensal
f	**NPV** ⟶	- 1.220,20. Valor atual do fluxo de caixa na data tk = 0
CHS	**PV**	Troca de sinal e armazena PV
5	**n**	Período no qual queremos o valor atual
	FV ⟶	- 2.791,52. Valor atual do fluxo de caixa na data tk = 5 meses

6.8.3.1 Cálculo do valor atual usando as teclas financeiras e os registradores de armazenamento

Usando as teclas financeiras e a aritmética, podemos, com os registradores de armazenamento, determinar o valor atual de um fluxo de caixa sem necessidade de introduzi-lo. De acordo com os dados do exercício anterior, temos:

f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento
1.500,00	**PV**	Introduz o pagamento incidente na data tk = 0 com sinal de fluxo de caixa
18	**i**	Introduz a taxa de juros
5	**n**	Introduz o número de períodos a serem capitalizados
FV	- 3431,64 ⟶	Calcula o valor atual na data tk = 5
STO	0	Armazena no registrador 0
1.000,00	**PV**	Introduz o pagamento incidente na data tk = 2 com sinal de fluxo de caixa
3	**n**	Introduz o número de períodos a serem capitalizados
FV	- 1643,03 ⟶	Calcula o valor atual na data tk = 5
STO	+ 0	Soma com valor já armazenado anteriormente no registrador
1.500,00	**CHS PV**	Introduz o recebimento incidente

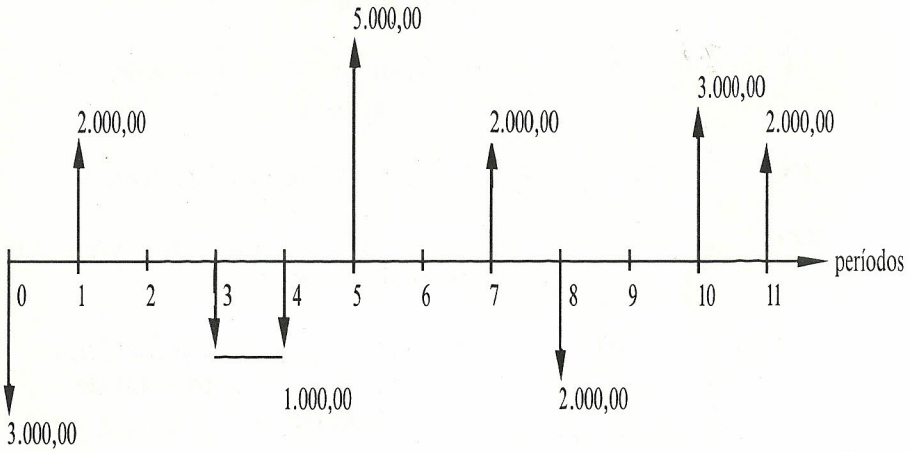
		na data tk = 6 com sinal de fluxo de caixa
1	**CHS n**	Introduz o número de períodos a descapitalizar
FV	1271,19 ⟶	Calcula o valor atual na data tk = 5
STO	+ 0	Soma com o valor já armazenado no registrador 0
1.000,00	**CHS PV**	Introduz o recebimento incidente na data tk = 8 com sinal de fluxo de caixa
3	**CHS n**	Introduz o número de períodos a descapitalizar
FV	608,63 ⟶	Calcula o valor atual na data tk = 5
STO	+ 0	Soma com o valor já armazenado no registrador 0
2.000,00	**CHS PV**	Introduz o recebimento incidente na data tk = 10
5	**CHS n**	Introduz o número de períodos a descapitalizar
FV	874,22 ⟶	Calcula o valor atual na data tk = 5
STO	+ 0	Soma com o valor já armazenado no registrador 0
1.500,00	**PV**	Introduz o pagamento incidente na data tk = 12 com sinal de fluxo de caixa
7	**CHS n**	Introduz o número de períodos a

		descapitalizar
FV	-470,89 ⟶	Calcula o valor atual na data tk = 5
STO	+ 0	Soma com o valor já armazenado no registrador
RCL	0 ⟶	- 2.791,52. Valor atual do fluxo de caixa na data tk = 5 meses

6.8.4 Taxa interna de retorno modificada

Na prática, os recursos são captados e aplicados a taxas diferentes. O cálculo da taxa interna de retorno, como feito até aqui, pressupõe que, tanto os fluxos de caixa positivos, como os negativos, são considerados com a mesma taxa. Mostraremos, a seguir, um modo de levar em conta as taxas diferentes.

Vamos considerar o fluxo de caixa abaixo supondo que as saídas sejam pagamentos feitos pela empresa à taxa de 70,00% a.p., e os valores positivos sejam disponibilidades investidas a uma taxa de 60,00% a.p.



Os passos recomendados para a solução desse problema são:

Determinar o valor futuro dos fluxos de caixa positivos à taxa de 60,00% a.p.

Calcular o valor presente dos fluxos de caixa negativos à taxa de 70,00% a.p.

Calcular a taxa interna de retorno, utilizando as teclas financeiras.

- **Cálculo do valor futuro dos fluxos de caixa positivos**

f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento
0	**g CFo**	Fluxo de caixa inicial
2.000,00	**g CFj**	Valor do primeiro grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do segundo grupo de fluxos de caixa
3	**g Nj**	Número de vezes que este valor se repete
5.000,00	**g CFj**	Valor do terceiro grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do quarto grupo de fluxos de caixa
2.000,00	**g CFj**	Valor do quinto grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do sexto grupo de fluxos de caixa
2	**g Nj**	Número de vezes que

		este valor se repete
3.000,00	**g CFj**	Valor do sétimo grupo de fluxos de caixa
2.000,00	**g CFj**	Valor do oitavo grupo de fluxos de caixa
60	**i**	Taxa de juros ao período para as disponibilidades de caixa
f	**NPV** →	1.840,00 → Valor presente dos fluxos de caixa positivos
	CHS PV	Troca de sinal e armazena PV
11	**n**	Número de períodos
	FV →	323.695,61. Valor futuro

• Cálculo do valor presente dos fluxos de caixa negativos

f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores financeiros e de armazenamento
3.000,00	**CHS g CFo**	Fluxo de caixa inicial
0	**g CFj**	Valor do primeiro grupo de fluxos de caixa
2	**g Nj**	Número de vezes que este valor se repete
1.000,00	**CHS g CFj**	Valor do segundo grupo

		de fluxos de caixa
2	**g Nj**	Número de vezes que este valor se repete
0	**g CFj**	Valor do terceiro grupo de fluxos de caixa
3	**g Nj**	Número de vezes que este valor se repete
2.000,00	**CHS g CFj**	Valor do quarto grupo de fluxos de caixa
70	**i**	Taxa de juros ao período para os pagamentos da empresa
f	**NPV** →	- 3.351,94. Valor presente dos fluxos negativos

• Cálculo da taxa interna de retorno

323.695,61	**FV**	Valor futuro dos fluxos positivos
11	**n**	Número de períodos do fluxo
i	→ 51,51 →	Taxa interna de retorno modificada ao período

Vamos determinar qual seria a taxa interna de retorno, se não fossem conhecidas as taxas para pagamento e as disponibilidades.

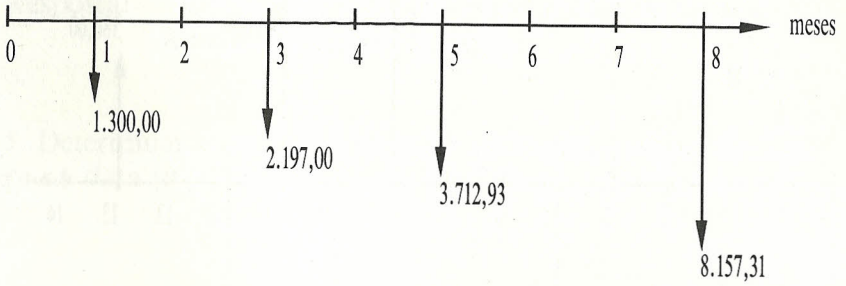
f	**CLEAR REG**	Limpa os registradores

		financeiros e de armazenamento
3.000,00	**CHS g CFo**	**Valor do fluxo de caixa inicial**
2.000,00	**g CFj**	Valor do primeiro grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do segundo grupo de fluxos de caixa
1.000,00	**CHS g CFj**	Valor do terceiro grupo de fluxos de caixa
2	**g Nj**	Número de vezes que este valor se repete
5.000,00	**g CFj**	Valor do quarto grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do quinto grupo de fluxos de caixa
2.000,00	**g CFj**	Valor do sexto grupo de fluxos de caixa
2.000,00	**CHS g CFj**	Valor do sétimo grupo de fluxos de caixa
0	**g CFj**	Valor do oitavo grupo de fluxos de caixa
3.000,00	**g CFj**	Valor do nono grupo de fluxos de caixa
2.000,00	**g CFj**	Valor do décimo grupo de fluxos de caixa

f	**IRR** ⟶	23,94. Taxa interna de retorno ao período do fluxo de caixa

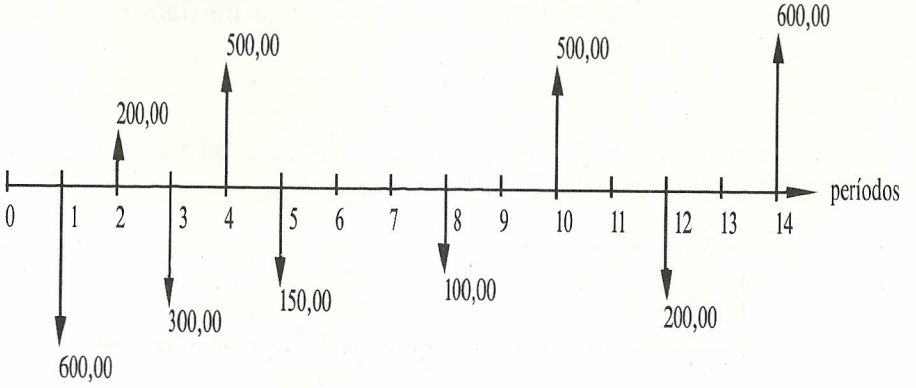
6.9 Exercícios de fixação

1. Determinar se os pagamentos do fluxo de caixa abaixo são equivalentes na data tk = quatro meses à taxa de juros compostos de 30,00% ao mês.



Resposta: Os capitais são equivalentes

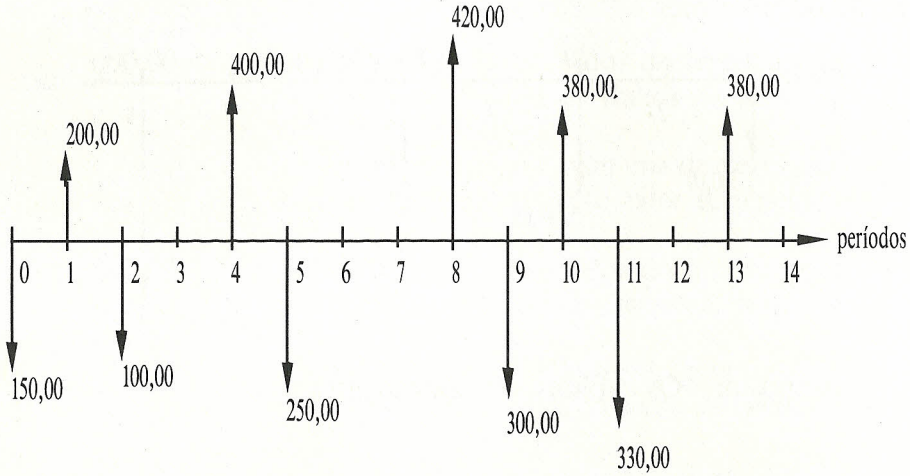
2. Determinar o valor atual do seguinte fluxo de caixa na data tk = 0.



i = 30,00% ao período

Resposta: O valor atual do fluxo de caixa na data tk = 0 é de - 314,42

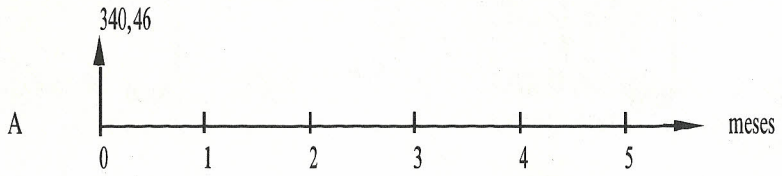
3. Determinar o valor atual do fluxo de caixa a seguir no período n = 6.

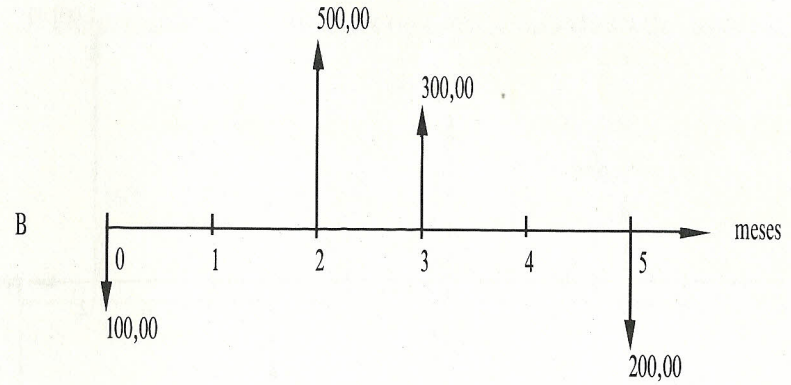


i = 40,00% ao período

Resposta: O valor atual do fluxo de caixa na data tk = 6 é 174,62

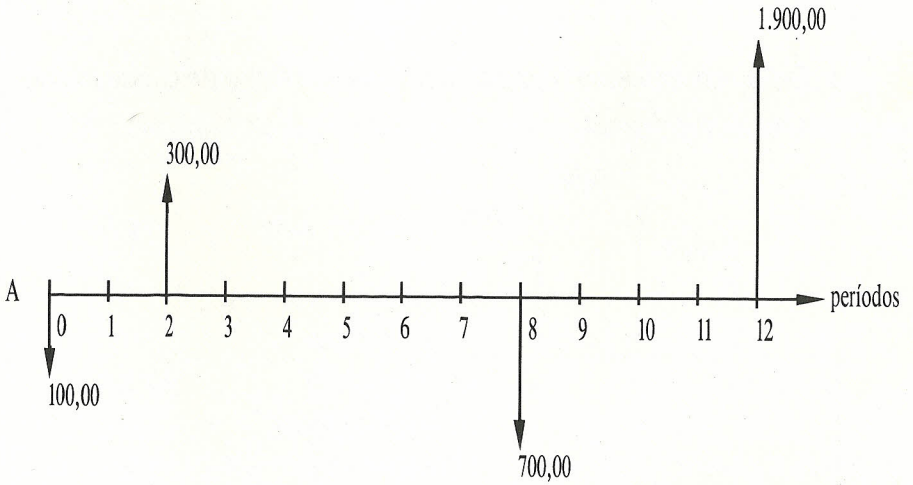
4. Determinar se os fluxos de caixa abaixo são equivalentes na data tk = 0 à taxa de 20,00% ao mês.

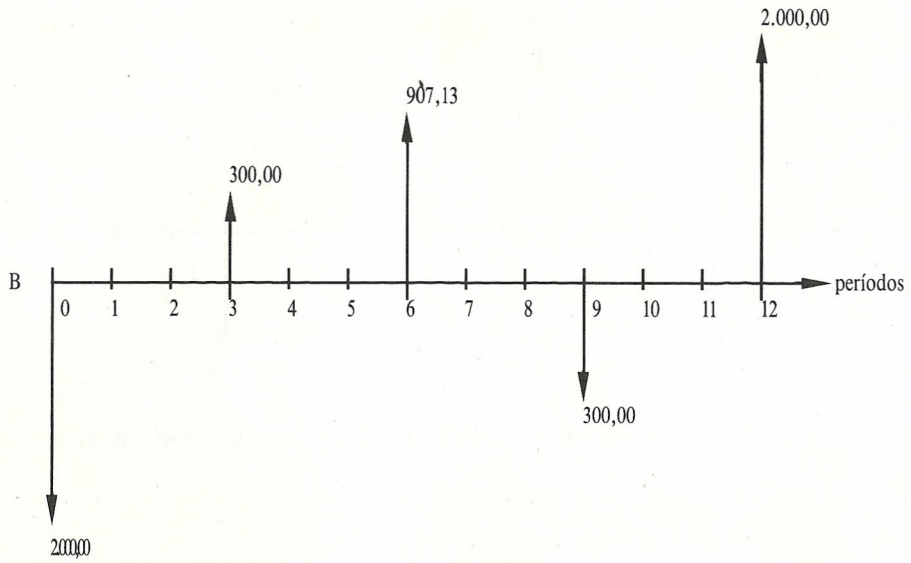




Resposta: Os fluxos de caixa são equivalentes na data tk = 0 à taxa de 20,00% ao mês.

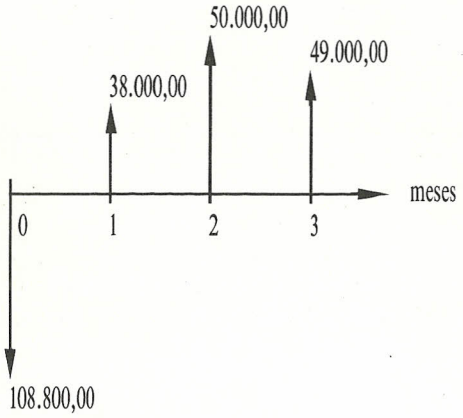
5. Determinar se os fluxos de caixa indicados a seguir são equivalente na data tk = 3, à taxa i = 28,00% ao período.





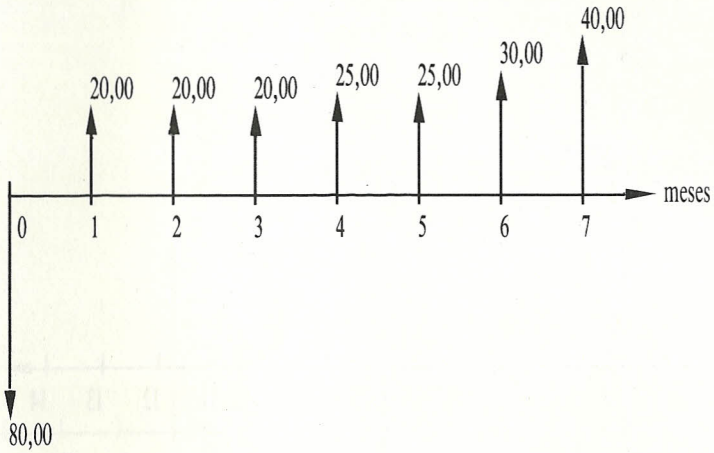
Resposta: Os fluxos de caixa não são equivalentes

6. Determinar a taxa interna de retorno do fluxo de caixa abaixo.



Resposta: A taxa interna de retorno é 11,93% ao mês

7. Determinar a taxa interna de retorno do fluxo de caixa abaixo.



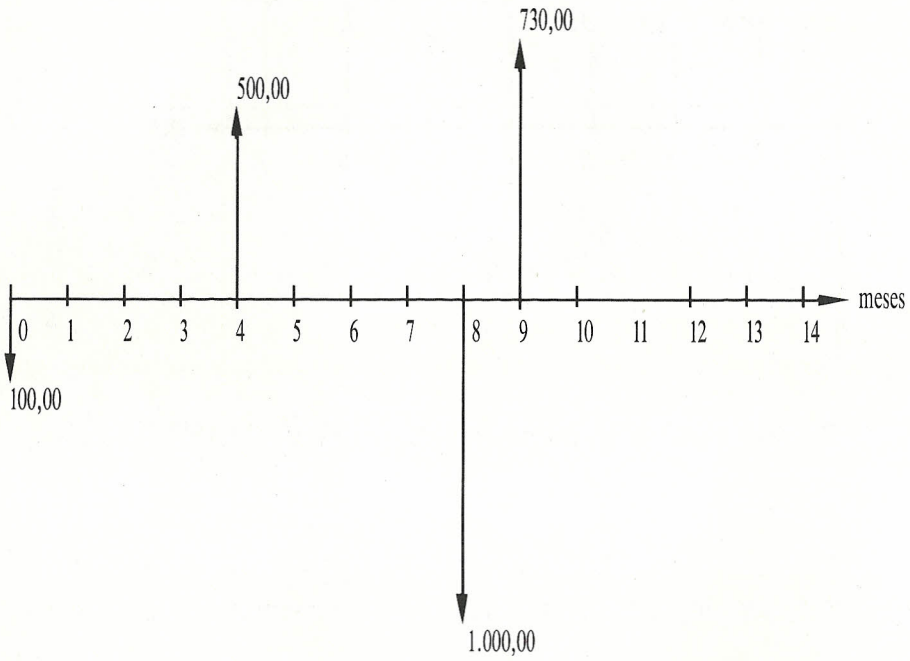
Resposta: A taxa interna de retorno é de 22,18% ao mês

8. Determinar a taxa interna de retorno do seguinte fluxo de caixa.

Ano	Fluxo de caixa
0	- 180.000,00
1	45.000,00
2 a 8	22.000,00
9	60.000,00
10	- 50.000,00
11 a 12	100.000,00

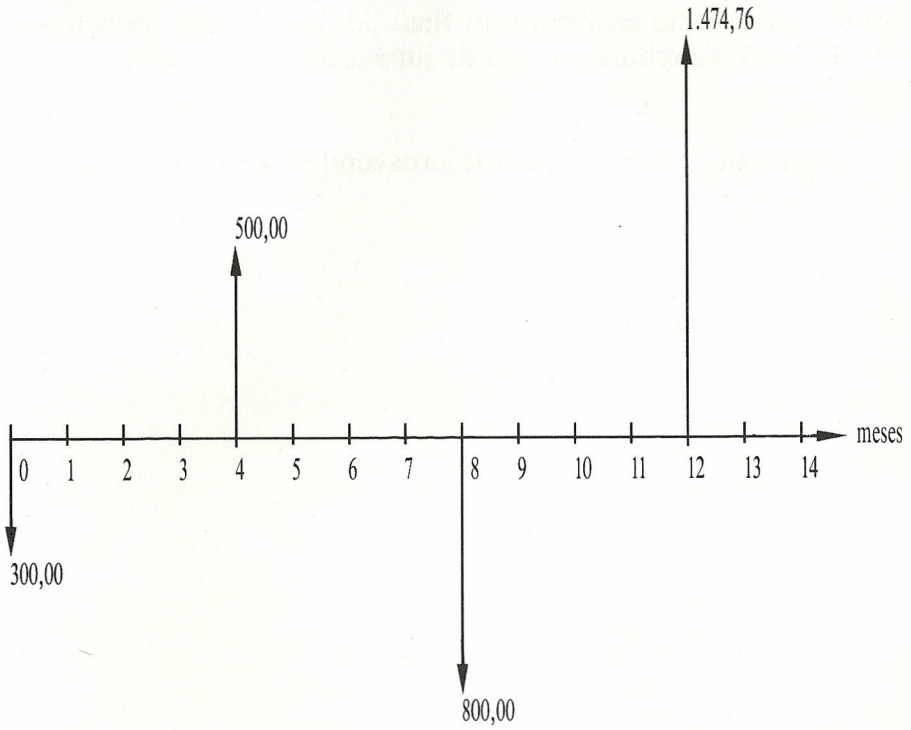
Resposta: A taxa interna de retorno é de 13,03% ao ano

9. Calcular a taxa interna de retorno do fluxo de caixa indicado a seguir.



Resposta: O valor da taxa interna de retorno é de 38,94% ao mês

10. Calcular taxa interna de retorno do fluxo de caixa abaixo.



Resposta: O valor da taxa interna de retorno é de 15,00% ao período

11. Um freezer é financiado em dezoito prestações mensais de Cr$ 32.500,00 cada uma e mais três prestações semestrais de reforço (*balloon payment*) de Cr$ 77.000,00, Cr$ 87.500,00 e Cr$ 47.500,00, ao final do sexto, décimo segundo e décimo oitavo mês, respectivamente. Calcular o valor financiado, supondo que a taxa cobrada pela financeira é de 25,00% ao mês.

Resposta: O valor financiado é de Cr$ 154.711,85

12. Um consumidor adquire um refrigerador pelo sistema de crediário para pagamento em seis prestações mensais de Cr$ 87.000,00. Sabendo-se que o valor financiado foi de Cr$ 218.537,36, e que a primeira prestação será paga no final do terceiro mês (dois meses de carência), determinar a taxa de juros cobrada pela loja.

Resposta: A taxa mensal de juros composta é de 18,00% ao mês

CAPÍTULO 7

Série de pagamentos ou recebimentos

7.1 Definição e classificação

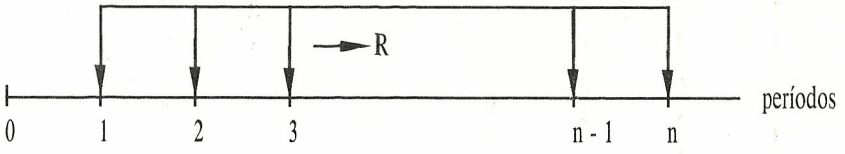
Trata-se de uma sucessão de pagamentos ou recebimentos com vencimentos periódicos, isto é, feitos a intervalos regulares de tempo.

Os pagamentos ou recebimentos podem ser iguais ou variáveis, e incidir no começo de cada período (termos antecipados), ou no final (postecipados ou vencidos).

Com base nessas características, podemos estabelecer a seguinte classificação para as séries:

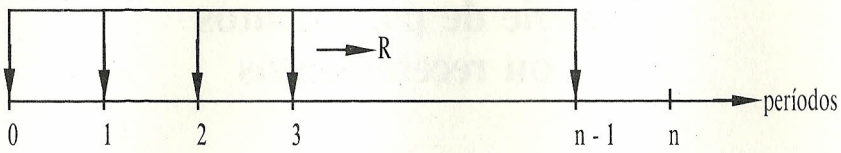
- **Séries de pagamentos ou recebimentos iguais com termos postecipados (vencidos)**

Ex.:



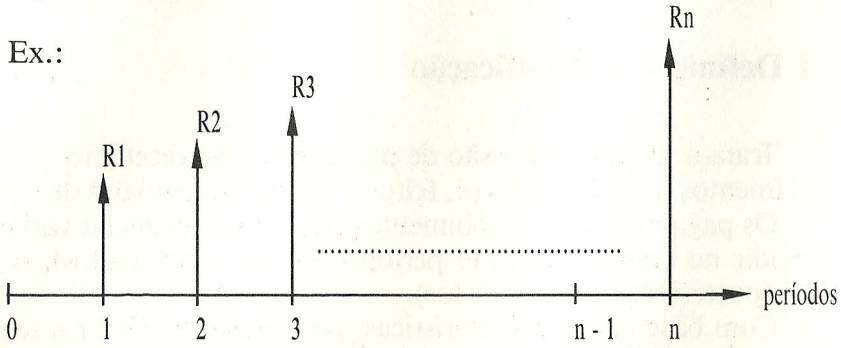
• **Séries de pagamentos ou recebimentos iguais com termos antecipados**

Ex.:



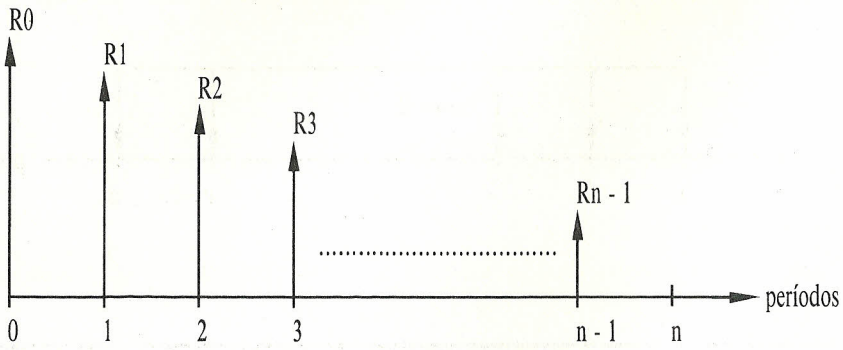
• **Séries de pagamentos ou recebimentos variáveis com termos postecipados (vencidos)**

Ex.:



• **Séries de pagamentos ou recebimentos variáveis com termos antecipados**

Ex.:

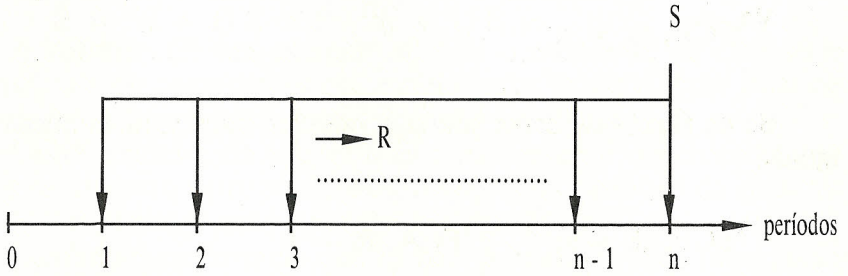


7.2 Dedução da fórmula do montante S de uma série postecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos

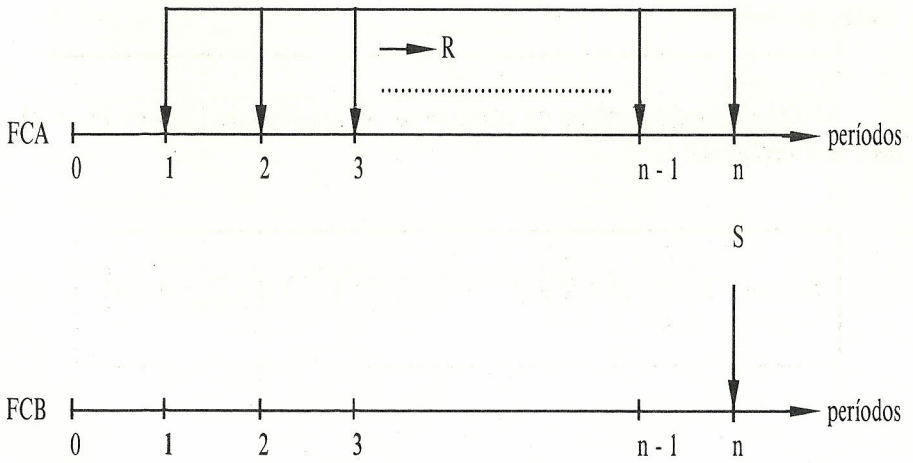
Sejam conhecidos:

R = Valor dos pagamentos ou recebimentos
i = Taxa de juros compostos
n = Número de períodos

Seja S o montante das séries a ser determinado:



Vamos decompor o fluxo de caixa anterior em dois fluxos:



Analisando os fluxos de caixa A e B, podemos concluir que S é o montante da série postecipada, se eles são equivalentes. Observe-se que dois fluxos de caixa são equivalentes em uma determinada data tk quando seus valores atuais são iguais na data tk a uma determinada taxa i de juros compostos.

Seja tk = n a data na qual vamos determinar os valores atuais dos fluxos de caixa:

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ n} = R\ (1 + i)^{n-1} + R\ (1 + i)^{n-2} + R\ (1 + i)^{n-3} + \ldots + R\ (1 + i)^{n-n}$$

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ n} = S\ (1 + i)^{n-n} = S\ (1 + i)^{0} = S$$

Se os fluxos de caixa são equivalentes, seus valores atuais são iguais:

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ n} = VA_{FCA,\ tk\ =\ n}$$

$$S = R\left[(1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-3} + \ldots + (1 + i) + 1\right] \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (1) por (1 + i), não a alteramos:

$$S\ (1 + i) = R\left[(1 + i)^{n} + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \ldots + (1 + i)^{2} + (1 + i)\right] \quad (2)$$

Subtraindo membro a membro a igualdade (1) da (2), temos:

$$S\ (1 + i) - S = R\left[(1 + i)^{n} - 1\right]$$

$$S \times i = R\left[(1 + i)^{n} - 1\right]$$

$$S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^{n} - 1\right] \quad (3)$$

A fórmula (3) nos permite calcular o montante de uma série postecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R ao final de n períodos e a uma dada taxa i de juros compostos.

Outra maneira de chegar a essa expressão é observando que o que se encontra entre parênteses, no segundo membro da igualdade (1), é uma progressão geométrica de razão (1 + i).

Lembrando a fórmula que fornece a soma de uma progressão geométrica, temos:

$$Spg = \frac{a1\ q^{n} - a1}{q - 1} = \frac{a1\ (q^{n} - 1)}{q - 1}$$

Sendo:

a1 = Primeiro termo da progressão
q = Razão da progressão

Em nosso caso:

a1 = 1
q = (1 + i)

Onde:

$$Spg = \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

A igualdade (1) fica:

$$S = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

$$S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^n - 1\right]$$ Expressão idêntica à (3)

A partir da expressão (3), podemos obter uma fórmula derivada que nos permite calcular o valor dos pagamentos ou recebimentos conhecendo o montante do fluxo de caixa S, o número de períodos n e taxa i de juros compostos ao período.

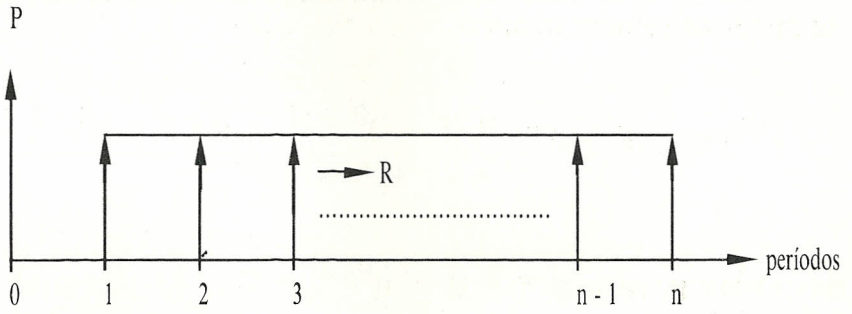
$$R = \frac{S \times i}{\left[(1 + i)^n - 1\right]} \quad (4)$$

7.3 Dedução da fórmula do valor atual P de uma série postecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e uma determinada taxa i de juros compostos

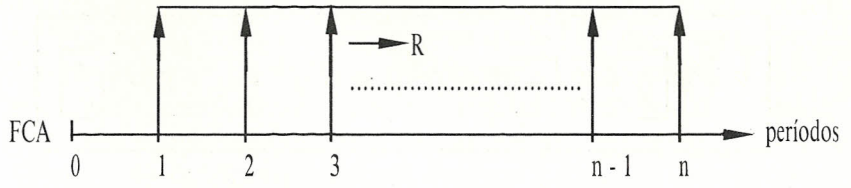
Sejam conhecidos:

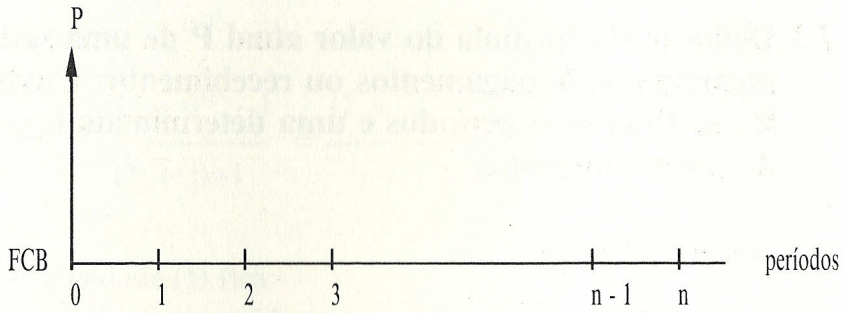
R = Valor dos pagamentos ou recebimentos
i = Taxa de juros compostos ao período
n = Número de períodos

Seja P o valor atual da série a ser determinado:



Vamos decompor o fluxo de caixa anterior em dois fluxos:





Podemos afirmar que P é o valor atual da série postecipada, se os fluxos de caixa A e B são equivalentes, bastando para tal que seus valores atuais sejam iguais numa determinada data tk a uma dada taxa i de juros compostos ao período.

Seja tk = 0, então, essa determinada data na qual vamos determinar os valores atuais:

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ 0} = R\,(1 + i)^{0\ +\ 1} + R\,(1 + i)^{0\ -\ 3} + \ldots + R\,(1 + i)^{0\ -\ n}$$

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ 0} = P\,(1 + i)^{0\ -\ 0} = P$$

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ 0} = VA_{FCB,\ tk\ =\ 0}$$

$$\boxed{P = R\left[(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-3} + \ldots + (1 + i)^{-n}\right]} \qquad (5)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (5) por (1 + i), não a alteramos:

$$\boxed{P\,(1 + i) = R\left[1 + (1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \ldots + (1 + i)^{-n}\right]} \qquad (6)$$

Subtraindo membro a membro a igualdade (5) da (6), temos:

$$P\,(1 + i) - P = R\left[1 - (1 + i)^{-n}\right]$$

$$P \times i = R\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^{n}}\right]$$

$$\boxed{P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^{n} - 1}{(1 + i)^{n}}\right]} \qquad (7)$$

A fórmula (7) nos permite calcular o valor atual ou o principal de uma série postecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R ao final de n períodos e a uma taxa dada i de juros compostos.

Outra maneira de obter essa expressão é observando que o que se encontra entre parênteses, no segundo membro da igualdade (5), é uma progressão geométrica decrescente de razão $(1 + i)^{-1}$.

Lembrando a fórmula que nos fornece a soma de uma progressão geométrica, temos:

$$Spg = \frac{a1\ q^{n} - a1}{q - 1} = \frac{a1\ (q^{n} - 1)}{q - 1}$$

Em nosso caso:

$$a1 = \frac{1}{1 + i} = (1 + i)^{-1}$$

$$q = \frac{1}{(1 + 1)} = (1 + i)^{-1}$$

$$Spg = \frac{1}{1 + i} \left[\frac{\frac{1}{(1 + i)^n}}{\frac{1}{(1 + i)}} - 1 \right] - 1$$

$$Spg = \frac{1}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n} \right]$$

A igualdade (5) fica, logo:

$$P = R \frac{1}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n} \right]$$

$$\boxed{P = \frac{R}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n} \right]}$$

Expressão idêntica a (7)

A partir da expressão (7) podemos obter uma fórmula derivada que nos permite calcular o valor dos pagamentos ou recebimentos conhecendo o principal ou valor atual do fluxo de caixa (P), o número de períodos (n) e a taxa (i) de juros compostos ao período.

$$\boxed{R = \frac{P \times i \times (1 + i)^n}{\left[(1 + i)^n - 1 \right]}} \quad (8)$$

Exemplos:

1. Um investidor deseja acumular a quantia de Cr$ 500.000,00 ao final de um ano e meio. Quanto deverá aplicar ao final de cada mês num fundo de renda fixa que proporciona um rendimento de 37,00% ao mês?

Dados:

S = 500.000,00
n = 18 meses
i = 37,00%
R = ?

$$R = \frac{S \times i}{\left[(1 + i)^n - 1 \right]}$$

$$R = \frac{S \times i}{\left[(1 + i)^n - 1 \right]} = \frac{500.000,00 \times 0,37}{\left[(1 + 0,37)^{18} - 1 \right]} = 642,25$$

O investidor deve aplicar Cr$ 642,25 ao final de cada mês.

2. Qual será o valor acumulado ao final de seis trimestres, resultante da aplicação trimestral de Cr$ 15.000,00 em uma modalidade de aplicação que rende 30,00% a.m.?

Dados:

R = 15.000,00
n = 6 trimestres
i = 30,00 a.m.
S = ?

$$S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^n - 1\right]$$

O primeiro passo é determinar a taxa trimestral equivalente à taxa de 30,00% a.m.

Lembrando a fórmula (1) do capítulo 4, temos:

$$ia.t. = (1 + 0{,}3)^{\frac{90}{30}} - 1 = 1{,}197\text{ a.t.} \qquad i = 119{,}70\%\text{ a.t.}$$

Usando a fórmula, temos:

$$S = \frac{15.000{,}00}{1{,}1997} \times \left[(1 + 1{,}197)^6 - 1\right] = 1.396.684{,}30$$

O valor acumulado ao final de seis trimestres será de Cr$ 1.396.684,30.

3. Um consumidor pagou um televisor em quatro prestações de Cr$ 30.804,00 quitadas ao final de cada mês. Qual o valor à vista do aparelho, sabendo que a loja cobrou uma taxa de juros de 28,00% a.m.?

Dados:

R = 30.804,00
n = 4 meses
i = 28,00 a.m.
P = ?

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right]$$

$$P = \frac{30.804{,}00}{0{,}28}\left[\frac{(1 + 0{,}28)^4 - 1}{(1 + 0{,}28)^4}\right]$$

P = 69.030,77

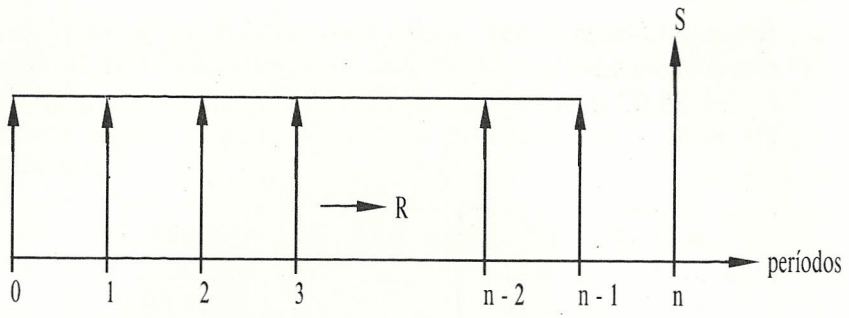
O valor à vista do televisor é de Cr$ 69.030,77.

7.4 Dedução da fórmula do montante S de uma série antecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos

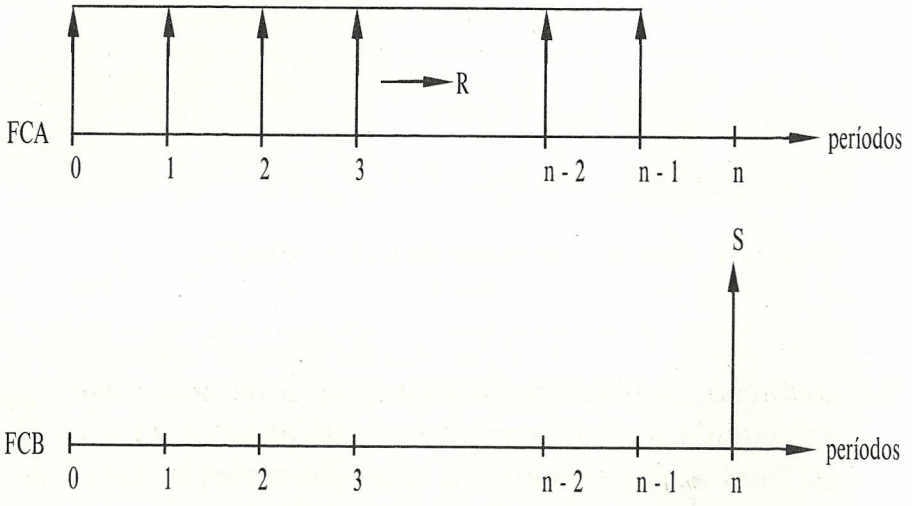
Sejam conhecidos:

R = Valor dos pagamentos ou recebimentos
i = Taxa de juros compostos ao período
n = Número de períodos

Seja S o montante da série a ser determinado:



Vamos decompor o fluxo de caixa anterior em dois fluxos:



Analisando os fluxos de caixa A e B, podemos concluir que S é o montante da série antecipada, se eles são equivalentes. Novamente, observe-se que dois fluxos de caixa são equivalentes em uma determinada data tk a uma dada taxa i de juros compostos quando seus valores atuais são iguais.

Seja tk = n, a data na qual vamos determinar os valores atuais dos fluxos de caixa:

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ n} = R\,(1+i)^{n-0} + R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2} + \ldots + R\,(1+i)^{2} + R\,(1+i)$$

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ n} = S\,(1+i)^{n-n} = S\,(1+i)^{0} = S$$

Se os fluxos de caixa são equivalentes, seus valores atuais são iguais:

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ n} = VA_{FCA,\ tk\ =\ n}$$

$$S = R\left[(1+i)^{n} + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)^{2} + (1+i)\right] \qquad (9)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (9) por (1 + i), não a alteramos:

$$S\,(1+i) = R\left[(1+1)^{n+1} + (1+i)^{n} + \ldots + (1+i)^{3} + (1+i)^{2}\right] \qquad (10)$$

Subtraindo membro a membro a igualdade (9) da (10), obtemos:

$$S\,(1+i) - S = R\left[(1+i)^{n+1} - (1+i)\right]$$

$$S \times i = R \times (1+i) \times \left[(1+i)^{n} - 1\right]$$

$$S = \frac{R}{i}\left[(1+i)^{n} - 1\right] \times (1+i) \qquad (11)$$

A fórmula (11) nos permite calcular o montante de uma série antecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R ao final de n períodos e a uma data taxa i de juros compostos.

Outra maneira de chegar a essa expressão, no segundo membro da igualdade (9), é uma progressão geométrica de razão (1 + i).

Lembrando a fórmula que nos fornece a soma de uma progressão geométrica, temos:

$$Spg = \frac{a1\ q^n - a1}{q - 1} = \frac{a1\ (q^n - 1)}{q - 1}$$

Em nosso caso:

$a1 = (1 + i)$
$q = (1 + i)$

Onde:

$$Spg = \frac{(1 + i)\ (1 + i)^n - (1 + i)}{(1 + i) - 1} = \frac{(1 + i)\left[(1 + i)^n - 1\right]}{i}$$

A igualdade (9) fica, logo:

$$S = R \times \frac{(1 + i)\left[(1 + i)^n - 1\right]}{i}$$

$$\boxed{S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^n - 1\right] \times (1 + i)}$$

Expressão idêntica à (11)

A partir da expressão (11) podemos obter uma fórmula derivada que nos permite calcular o valor dos pagamentos ou recebimentos conhecendo o montante do fluxo de caixa S, o número de períodos n e a taxa i de juros compostos ao período.

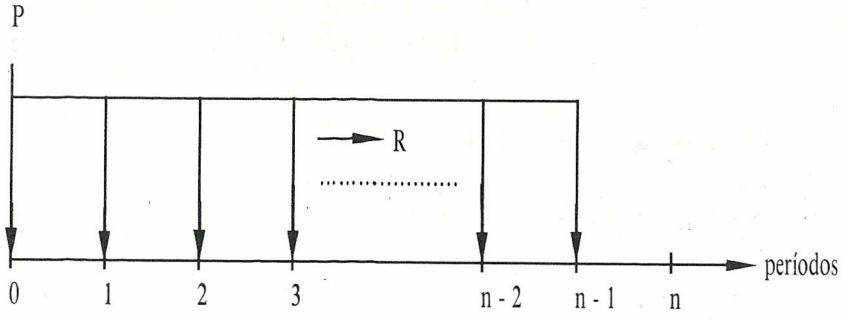
$$\boxed{R = \frac{S \times i}{\left[(1 + i)^n - 1\right] \times (1 + i)}} \quad (12)$$

7.5 Dedução da fórmula do valor atual P de uma série antecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos

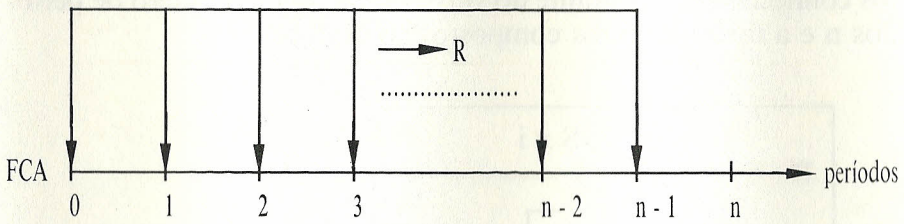
Sejam conhecidos:

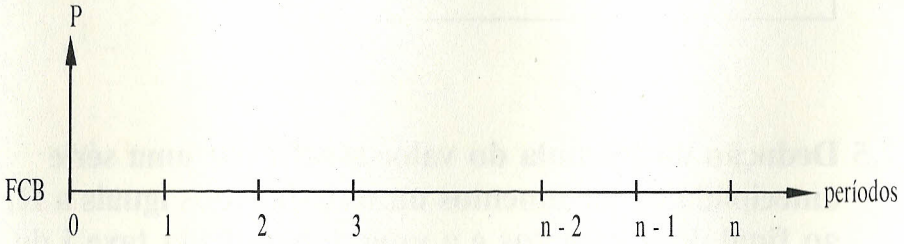
R = Valor dos pagamentos ou recebimentos
i = Taxa de juros compostos ao período
n = Número de períodos

Seja (P) o valor atual da série a ser determinado:



Vamos decompor o fluxo de caixa anterior em dois fluxos:





Podemos afirmar que P é o valor atual da série antecipada, se os fluxos de caixa A e B são equivalentes, bastando para tal que seus valores atuais sejam iguais numa determinada data tk a uma dada taxa i de juros compostos ao período.

Seja tk = 0, então, essa determinada data na qual vamos determinar os valores atuais:

$$VA_{FCA,\ tk\ =\ 0} = R\ (1 + i)^{0\ -\ 0} + R\ (1 + i)^{0\ -\ 1} + R\ (1 + i)^{0\ -\ 2} + R\ (1 + i)^{0\ -\ 3} + \ldots + R\ (1 + i)^{0\ -\ (n\ -\ 2)} + R\ (1 + i)^{0\ -\ (n\ -\ 1)}$$

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ 0} = P\ (1 + i)^{0\ -\ 0} = P$$

$$VA_{FCB,\ tk\ =\ 0} = VA_{FCA,\ tk\ =\ 0}$$

$$P = R\left[1 + (1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-3} + \ldots + (1 + i)^{-n\ +\ 2} + (1 + i)^{-n\ +\ 1}\right] \quad (13)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (13) por (1 + i), não a alteramos:

$$P(1 + i) = R\left[(1 + i) + 1 + (1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \ldots + (1 + i)^{-n\ +\ 3} + (1 + i)^{-n\ +\ 2}\right] \quad (14)$$

Subtraindo membro a membro a igualdade (13) de (14), temos:

$$P\ (1 + i) - P = R\left[(1 + i) - (1 + i)^{-\ n\ +\ 1}\right]$$

$$P \times i = R\ (1 + i)\left[1 - (1 + i)^{-\ n}\right]$$

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right] \times (1 + i)$$

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right] \times (1 + i) \quad (15)$$

A fórmula (15) nos permite calcular o valor atual ou principal de uma série antecipada de pagamentos ou recebimentos iguais a

R, ao final de n períodos e a uma dada taxa i de juros compostos.

Outra maneira de chegar a essa expressão é observando que o que se encontra entre parênteses no segundo membro da igualdade (13) é uma progressão geométrica decrescente de razão $(1 + i)^{-1}$.

Usando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, temos:

$$Spg = \frac{a1\ q^n - a1}{q - 1} = \frac{a1\ (q^n - 1)}{q - 1}$$

Em nosso caso:

$$a1 = 1$$

$$q = \frac{1}{(1 + i)}$$

$$Spg = \frac{\left[\frac{1}{1 + i}\right]^n - 1}{\frac{1}{1 + i} - 1} = \frac{\left[(1 + i)^n - 1\right]}{[1 + i]^n} \times \frac{(1 + i)}{i}$$

A igualdade (13) fica, logo:

$$\boxed{P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right] x\ (1 + i)}$$

Expressão idêntica à (15)

A partir da expressão (15) podemos obter uma fórmula derivada que nos permite calcular o valor dos pagamentos ou recebimentos, conhecendo o principal, o valor atual do fluxo de caixa P, o número de períodos n e a taxa i de juros compostos ao período.

$$\boxed{R = \frac{P\ x\ i\ x\ (1 + i)^n}{\left[(1 + i)^n - 1\right]} x\ (1 + i)} \quad (16)$$

Exemplos:

1. Um consumidor adquiriu um freezer em cinco prestações mensais de Cr$ 6.200,00, pagando a primeira no ato da compra. Qual o valor à vista do equipamento, se a loja cobra uma taxa de juros de 38,00% a.m.?

Dados:

R = 6.200,00
n = 5
i = 38,00% a.m.
P = ?

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right] x\ (1 + i)$$

$$P = \frac{6.200,00}{0,38} x \left[\frac{(1 + 0,38)^5 - 1}{(1 + 0,38)^5}\right] x\ (1 + 0,38) = 18.017,04$$

O valor à vista do equipamento é de Cr$ 18.017,04.

2. Um investidor aplicou Cr$ 2.500,00 no começo de cada mês durante um ano e meio. Qual o valor acumulado, se o rendimento médio da aplicação foi de 45,00% a.m.?

Dados:

P = 2.500,00
n = 18 meses
i = 45,00% a.m.
S = ?

$$S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^n - 1\right] \times (1 + i)$$

$$S = \frac{2.500,00}{0,45}\left[(1 + 0,45)^{18} - 1\right] \times (1 + 0,45)$$

S = 6.459.192,78

O valor acumulado no final do período é de Cr$ 6.459.192,78.

3. Qual o valor da prestação a ser paga no início de cada mês, a qual amortiza um principal de Cr$ 30.000,00 ao final de oito meses, sendo a taxa bimestral de 75,00%?

Dados:

P = 30.000,00
n = 8 meses
i = 75,00% a.b.
R = ?

$$R = \frac{P \times i \times (1 + i)^n}{\left[(1 + i)^n - 1\right] \times (1 + i)}$$

O primeiro passo é determinar a taxa mensal equivalente à taxa de 75,00% a.b. Lembrando a fórmula (1) do capítulo 4, temos:

$$ia.m = (1 + 0,75)^{\frac{30}{60}} - 1 = 0,3229$$

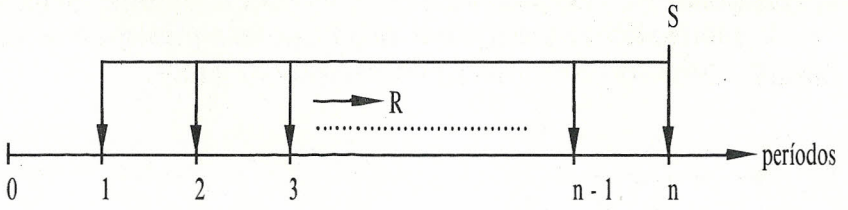
i = 32,29% a.m.

$$R = \frac{30.000,00 \times 0,3229 \times (1 + 0,3229)^8}{\left[(1 + 0,3229)^8 - 1\right] \times (1 + 0,3229)} = 8.196,33$$

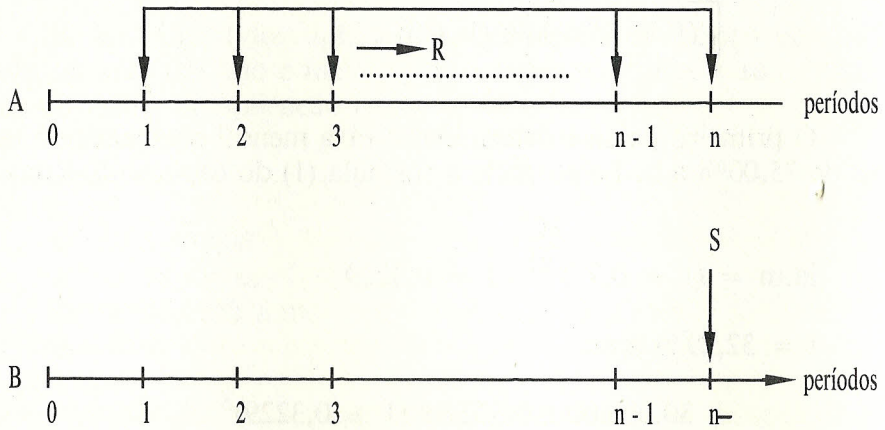
O valor da prestação a pagar no início de cada mês é de Cr$ 8.196,33.

7.6 Observações

Quando mostramos a dedução do montante S de uma série de pagamentos ou recebimentos iguais a R, ao final de n períodos e a uma determinada taxa i de juros compostos, tínhamos o seguinte fluxo de caixa:



O qual foi decomposto em dois fluxos:



Fizemos a equivalência dos fluxos de caixa A e B na data tk = n e chegamos à expressão do montante S:

$$S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^n - 1\right]$$

Lembrando que dois fluxos de caixa são equivalentes em uma determinada data a uma taxa i de juros compostos, se seus valores atuais são iguais naquela data, podemos dizer, então, intuitivamente, que o efeito dos n pagamentos iguais a R na data tk = n é idêntico a fazer um único pagamento, nesta data, no valor de S.

A partir dessa expressão poderíamos obter a do principal, bastando determinar qual o principal que produzirá um montante igual a S ao final de n períodos e a uma dada taxa i de juros compostos.

Lembrando a expressão que nos fornecia o principal na capitalização composta, fórmula (2) do capítulo 2, temos:

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

De onde obtemos:

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right]$$

Outra maneira de obter essa expressão simplificadamente seria considerar um fluxo de caixa C com um pagamento na data tk = 0 e fazer a equivalência do mesmo com o fluxo de caixa B.

Quanto às fórmulas das séries antecipadas de pagamentos ou recebimentos, elas também podem ser obtidas de uma maneira simples. Basta lembrar que, nelas, os pagamentos ou recebimentos incidem no começo de cada período; portanto, a expressão deve ser capitalizada por mais um período.

$$S_{antecipadas} = S_{postecipadas} \times (1 + i)$$

$$S = \frac{R}{i}\left[(1 + i)^n - 1\right] \times (1 + i)$$

Para obter a fórmula do principal, só é preciso determinar, usando as fórmulas da capitalização composta, qual o principal que permite obter o montante S a uma dada taxa i de juros compostos.

Lembrando a fórmula (2) do capítulo 2, temos:

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right] \times (1 + i)$$

Essas fórmulas também poderiam ter sido obtidas utilizando-se o conceito de equivalência de fluxos de caixa, com um raciocínio similar ao já descrito anteriormente.

O importante, aqui, é perceber que o conceito de equivalência de fluxos de caixa permite uma flexibilidade muito grande na obtenção das diversas fórmulas, bem como na determinação de variadas opções de amortização de dívidas ou de alternativas de investimento.

7.7 Utilização da calculadora HP12C

Juntamente às teclas financeiras, a HP12C possui uma tecla PMT (*Periodic Payment*), que permite introduzir o valor periódico.

Para trabalhar com séries antecipadas, basta pressionar as teclas g BEG, e o termo BEGIN (início) aparece no visor. Com as postecipadas g END devem ser pressionadas, não aparecendo nenhuma mensagem no visor.

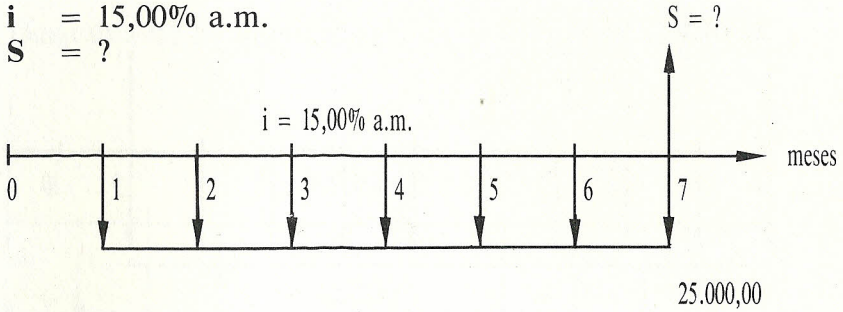
7.7.1 Exemplos:

1. Calcular o montante produzido pela aplicação de Cr$ 25.000,00 durante sete meses a uma taxa de 15,00% a.m., sabendo que a aplicação é realizada no final de cada mês.

Dados:

R = 25.000,00
n = 7 meses

i = 15,00% a.m.
S = ?

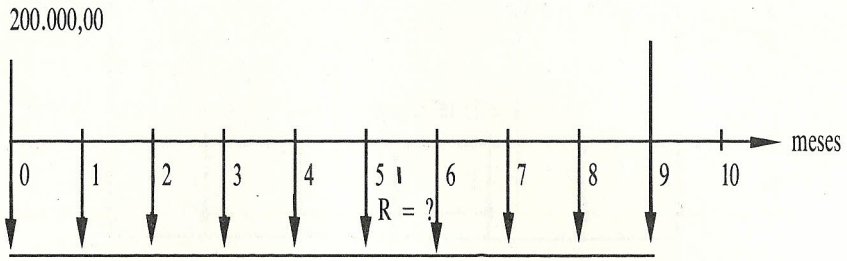


f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
g	**END**	Posiciona a calculadora para pagamentos postecipados
7	**n**	Introduz o número de prestações
15,00	**i**	Introduz a taxa mensal
25.000,00	**CHS PMT**	Valor das prestações mensais
FV	→	276.669,98. Valor do montante

2. Um cliente compra um bem, cujo valor à vista é de Cr$ 200.000,00, para ser quitado em dez prestações mensais, sendo a primeira paga no ato. Sabendo que a taxa de juros cobrada pela loja é de 28,00% ao mês, qual o valor das prestações mensais?

Dados:

P = 200.000,00
n = 10 meses
i = 28,00% a.m.
R = ?



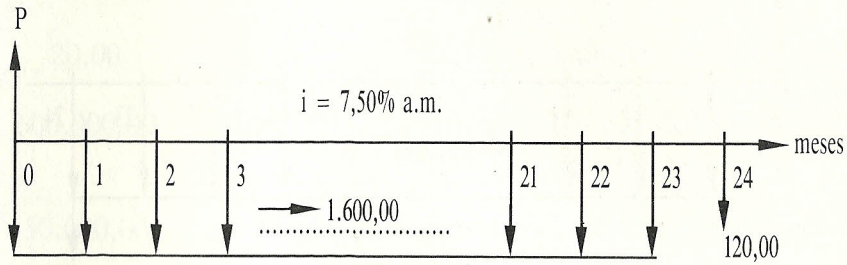
f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
g	**BEG**	Posiciona a calculadora para pagamentos antecipados
10	**n**	Introduz o número de prestações
28,00	**i**	Introduz a taxa mensal
200.000,00	**CHS PV**	Introduz o valor do bem como sinal de fluxo de caixa
PMT	→	47.798,71. Valor das prestações mensais

3. Uma empresa pagará 1.600,00 UFIRs por mês correspondentes a uma operação de leasing. O contrato tem prazo de 24 meses, e a primeira parcela será paga por ocasião de sua assinatura. O valor residual a ser pago ao final dos dois anos será de 120,00 UFIRs. Sabendo-se que a taxa cobrada na operação é de 7,50% a.m., calcular o valor do equipamento objeto do leasing em UFIRs.

Dados:

R = 1.600,00
n = 24
i = 7,50% a.m.
P = ?

Diagrama de fluxo de caixa:

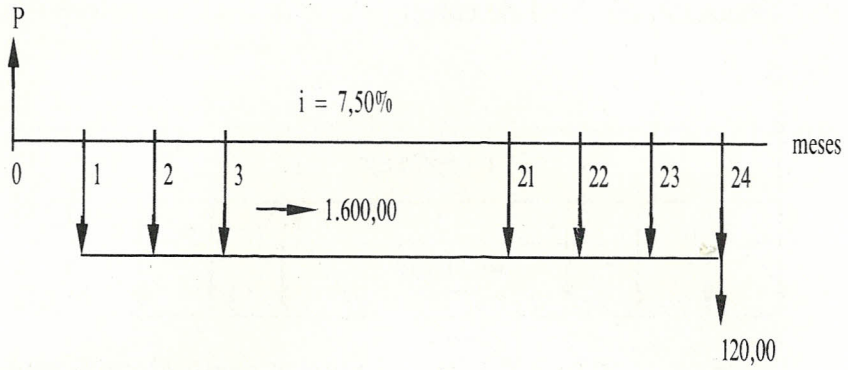


f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
g	**BEG**	Posiciona a calculadora para pagamentos antecipados
24	**n**	Introduz o número de prestações
7,50	**i**	Introduz a taxa mensal
1.600,00	**CHS PMT**	Valor das prestações mensais
120,00	**CHS FV**	Valor residual
PV	→	18.911,86. Valor do equipamento objeto do leasing

Se os pagamentos fossem postecipados, para calcular o valor do equipamento, bastaria posicionar a calculadora para pagamento postecipado. Tendo ela memória contínua, o procedimento seria o seguinte:

g	**END**	Posiciona a calculadora para pagamentos postecipados
PV	→	17.593,90. Valor do equipamento

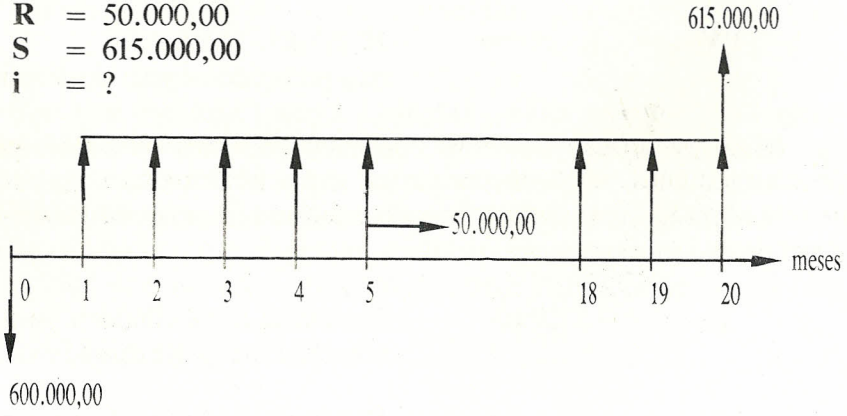
O diagrama de caixa seria, neste caso:



4. Uma debênture que paga uma renda mensal de Cr$ 50.000,00 ao final de cada mês, com prazo de vinte meses, foi negociada por Cr$ 600.000,00. Sabendo que o valor de resgate é de Cr$ 615.000,00, calcular a taxa líquida mensal de rendimento do aplicador.

Dados:

n = 20
P = 600.000,00
R = 50.000,00
S = 615.000,00
i = ?



f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros

g	**END**	Posiciona a calculadora para pagamentos postecipados
20,00	**n**	Introduz o número de prestações
600.000,00	**CHS PV**	Introduz o valor do principal com sinal de fluxo de caixa
50.000,00	**PMT**	Introduz o valor das prestações
615.000,00	**FV**	Introduz o valor de resgate
i	→	8,39. Taxa líquida mensal

7.7.2 Casos com períodos singulares

As calculadoras financeiras normalmente estão programadas para a resolução de problemas com pagamentos ou recebimentos em intervalos iguais de tempo.

A HP12C está programada, contudo, para resolver casos em que, entre a data do início e a do vencimento da primeira prestação, existe um intervalo de tempo que não coincide com o intervalo de tempo periódico.

Lembramos que é necessário que esteja acesso no visor o indicador "c", pois, em caso contrário, os juros correspondentes à fração serão calculados com base na capitalização simples. Para introduzi-lo no visor, basta pressionar as teclas STO EEX.

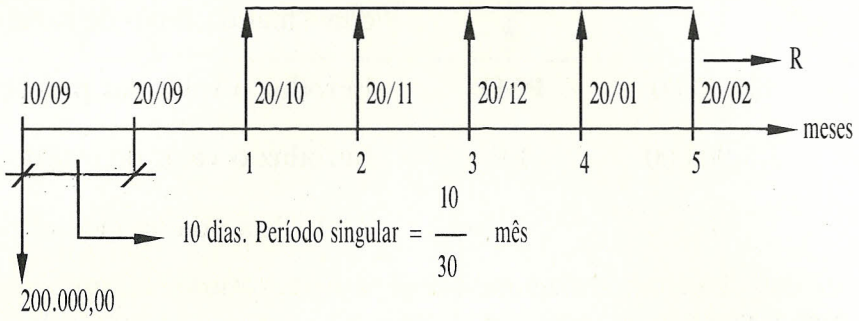
Vamos mostrar, com dois exemplos, como proceder na HP12C para resolver casos com períodos regulares.

Exemplo 1

No dia dez de setembro uma financeira concede um empréstimo de Cr$ 200.000,00 para ser quitado em cinco prestações mensais iguais. Sabendo-se que a primeira vence no dia vinte de outu-

bro, e que as demais, no dia vinte dos meses subseqüentes, e que a taxa de juros cobrada pela financeira é de 20,00% a.m., calcular o valor das prestações mensais.

Diagrama de fluxo de caixa:



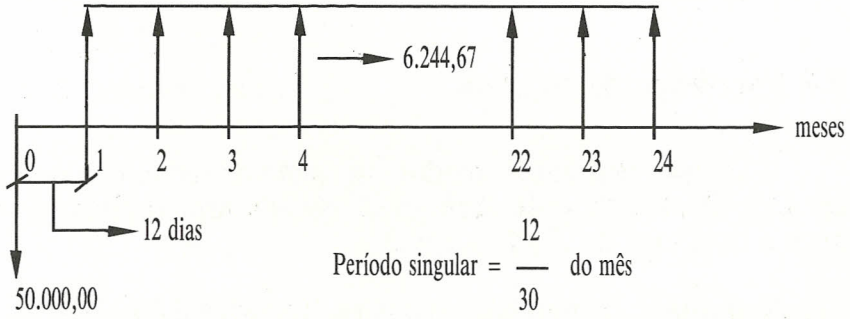
Para introduzir o valor na tecla n devemos levar em conta o número de dias do período singular. Neste exemplo, entre 10 e 20 de setembro temos dez dias; portanto, nosso período singular será de $\frac{10}{30}$ de mês.

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
STO	**EEX**	Posiciona a calculadora para calcular juros compostos no período singular (introduz o "c" no visor)
10	**ENTER**	Número de dias do período singular
30	÷	Calcula o período singular
5	**+ n**	Soma o período singular com o número de prestações e armazena o valor na tecla correspondente

20,00	**i**	Introduz a taxa de juros
200.000,00	**CHS PV**	Introduz o valor do financiamento
PMT	→	71.066,29. Valor das prestações mensais

Exemplo 2

Calcular a taxa correspondente a um financiamento de Cr$ 50.000,00 que será amortizado em 24 prestações mensais de Cr$ 6.244,67. Sabendo-se que a primeira vence em doze dias após a data da assinatura do contrato e que as demais têm seus vencimentos de mês em mês, a partir da primeira:



f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
STO	**EEX**	Posiciona a calculadora para calcular juros compostos no período singular (introduz o "c" no visor)
g	**BEG**	Posiciona a calculadora para pagamentos antecipados

12	**ENTER**	Número de dias do período singular
30	÷	Calcula o período singular
24	+ **n**	Soma o período singular com o número de prestações e armazena o valor na tecla correspondente
50.000,00	**CHS PV**	Introduz o valor do financiamento
6.244,67	**PMT**	Introduz o valor das prestações mensais
i	→	12,64. Taxa mensal de juros

7.8 Exercícios de fixação

1. Quanto terá um investidor em fundo de renda fixa que aplicar Cr$ 100.000,00 ao final de cada mês, durante o prazo de dois anos a uma taxa de 27,00% a.m.?

Resposta: O investidor terá Cr$ 114.425.308,00

2. Qual o valor que pode ser financiado em seis prestações mensais de Cr$ 50.000,00 pagas no final de cada mês, sabendo-se que a taxa de rendimento esperada do capital é de 95,32% a.t.?

Resposta: O valor de Cr$ 147.565,78

3. Uma loja está financiando um refrigerador que custa Cr$ 190.000,00 em cinco prestações iguais, a primeira delas incidindo

trinta dias depois. Se o lojista quer ganhar 27,00% a.m., qual o valor das prestações?

Resposta: O valor das prestações é de Cr$ 73.567,20

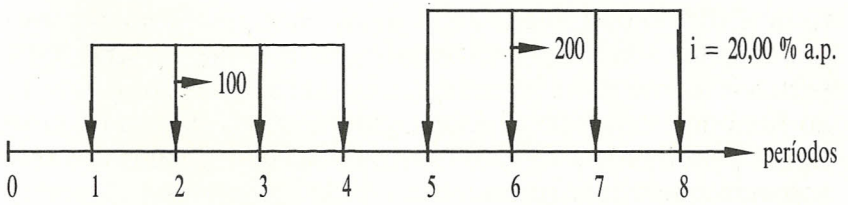
4. Qual a taxa de uma operação de empréstimo de 1.000,00 unidades de capital pelo prazo de doze meses, paga através de prestações de 184,48 unidades de capital, no final de cada mês?

Resposta: O valor da taxa é de 15,00% a.m.

5. Calcular o número de prestações trimestrais postecipadas de Cr$ 61.712,89 capazes de amortizar um financiamento de Cr$ 107.172,18 a uma taxa de 50,00% a.t.

Resposta: O número de prestações trimestrais é cinco

6. Determinar o valor atual e o montante da série a seguir.

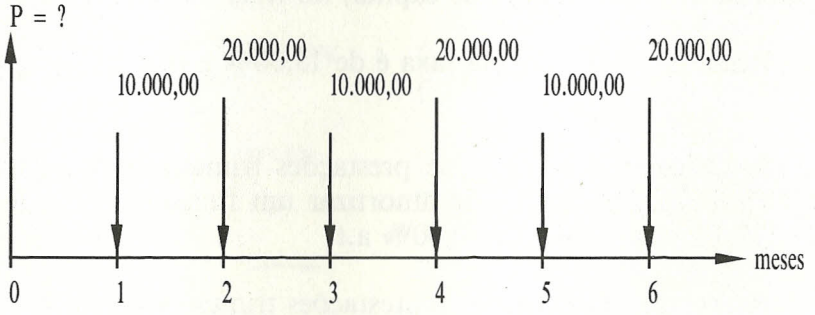


Resposta: O valor atual é 508,56
O montante é 2.186,71

7. Um comprador adquire um aparelho de som a ser pago em oito prestações iguais de Cr$ 35.000,00. Sabendo-se que a primeira vence sessenta dias da data do contrato, que as demais têm vencimentos mensais sucessivos, e que a taxa cobrada pela loja é de 26,00% a.m., calcular o valor financiado ao consumidor.

Resposta: O valor financiado é de Cr$ 90.020,17

8. Um cliente deseja liquidar um empréstimo bancário em seis prestações de valores alternados de Cr$ 10.000,00 e Cr$ 20.000,00, conforme indicado a seguir. Sabendo-se que a taxa de juros praticada pelo banco é de 35,00% a.m., calcular o valor do empréstimo.



Resposta: O valor do empréstimo é de Cr$ 34.001,17

9. Um funcionário de um banco precisa de um financiamento de Cr$ 350.000,00 em doze meses para completar a compra de um veículo. Além de prestações mensais iguais de Cr$ 70.000,00, pretende dar dois reforços que coincidem com suas gratificações ao final do sexto e do décimo segundo meses. A taxa de juros praticada pelo banco é de 25,00% a.m..Calcular o valor dos reforços, supondo que sejam iguais.

Resposta: O valor dos reforços é de Cr$ 269.722,89

10. Determinar os coeficientes da Tabela Price para uma taxa mensal de 30,00% a.m. e para três, cinco e sete pagamentos.

Resposta: Coeficiente para 3 pagamentos - 0,550627
Coeficiente para 5 pagamentos - 0,410582
Coeficiente para 7 pagamentos - 0,356874

11. Uma pessoa aplica Cr$ 40.000,00 no dia 1° de março. Nos cinco meses seguintes, aplicará Cr$ 25.000,00 sempre no dia 1°, consecutivamente. Qual será o montante no sexto mês, sabendo que lhe foi prometida uma rentabilidade de 28,00% a.m.?

Resposta: O montante será de Cr$ 454.318,87

12. Uma loja está financiando um freezer que custa Cr$ 200.000,00 em cinco prestações mensais de Cr$ 75.000,00. Qual a taxa cobrada pela loja, se:

a. a primeira prestação é paga no ato da compra.
b. a primeira prestação vence no final do mês.

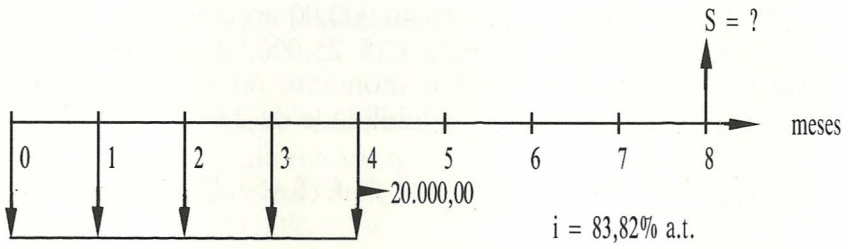
Resposta: a. A taxa é de 47,23% a.m.
b. A taxa é de 25,41% a.m.

13. Uma empresa quer fazer leasing de um utilitário, cujo valor é de Cr$ 10.000.000,00, pelo prazo de 36 meses, junto a uma instituição financeira que quer ganhar UFIR + 30% a.a.. O valor residual pactuado é de 1,00%. Determinar, para uma UFIR de Cr$ 60,00, o valor das prestações mensais, considerando:

a. Que a primeira é paga na assinatura do contrato.
b. Que a primeira é paga no final do primeiro mês.

Resposta: a. O valor das prestações é de 6585,49 UFIRs
b. O valor das prestações é de 6731,05 UFIRs

14. Calcular o montante do fluxo de caixa a seguir.



Resposta: O montante é de Cr$ 351.975,82

15. Calcular o número de prestações trimestrais capazes de amortizar um financiamento de Cr$ 100.000,00 à taxa de 84,00% a.t., sendo a primeira paga hoje, e sabendo que o valor das prestações é de Cr$ 47.924,49.

Resposta: O número de prestações trimestrais é cinco.

zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

CAPÍTULO 8

Aplicação às operações do mercado financeiro

8.1 Taxa Referencial de Juros (TR)

A Taxa Referencial de Juros (TR) surgiu com as modificações introduzidas pelo Plano Collor II como uma tentativa de desindexar a economia. A TR busca espelhar a taxa média de captação paga pelos bancos comerciais, similarmente ao que acontece com a Libor (*London Inter-Bank Offered Rate*) no mercado Inglês e Europeu e a PRIME RATE no mercado americano.

A TR tem uma variação por dia útil expressa através da Taxa Referencial Diária (TRD), e o Banco Central possui prazo até o oitavo dia útil do mês para divulgar a definitiva a vigorar em cada mês. A TRD, quando capitalizada no número de dias úteis do mês, é igual à TR deste, e, quando acumulada num determinado período de tempo, passa a ser conhecida como Taxa Referencial Diária Acumulada (TRDA).

8.1.1 Determinação da TRD a partir da TR

Vamos supor que a TR de um determinado mês seja 10,00% e que no mês existam 21 dias úteis. Para determinar a TRD vamos utilizar a fórmula (1) do capítulo 4:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$TRD = (1 + 0{,}10)^{\frac{1}{21}} - 1 = 0{,}004549$$

A TRD é, logo, de 0,4549%.

8.1.2 Projeção da TR a partir da TRD

Suponhamos que num mês onde existem vinte dias úteis, a TRD variou 0,47% nos primeiros cinco dias úteis. Se a variação esperada da TRD para os quinze restantes é de 0,50% por dia útil, projetar a TR do referido mês.

$$TR = (1 + 0{,}0047)^5 (1 + 0{,}005)^{15} - 1$$

$$TR = 0{,}1032$$

Se a variação da TRD se mantiver em 0,50% nos últimos quinze dias úteis, a TR do mês será de 10,32%.

8.1.3 Cálculo da TRDA

Tomemos um período de 45 dias no qual temos trinta dias úteis. Calcular a TRDA do período, supondo que nos primeiros doze dias úteis a TRD variou 0,46% ao dia, nos dez dias úteis seguintes variou 0,48% ao dia, e nos oito dias úteis finais, 0,47% ao dia.

$$TRDA = (1 + 0{,}0046)^{12} (1 + 0{,}0048)^{10} (1 + 0{,}0047)^8 - 1$$

$$TRDA = 0{,}1508$$

A TRDA do período foi de 15,08%.

8.2 Cálculo do Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) sobre operações de curto prazo

A partir do dia 25 de julho de 1990, o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) passou a taxar todas as operações financeiras envolvendo títulos de renda fixa, incluindo as de financiamento desenvolvidas nas bolsas de valores, de futuro e de mercadorias, com prazo inferior a dezesseis dias úteis. Esse imposto foi criado com o objetivo de alongar o perfil das operações financeiras, incentivando o mercado de longo prazo e constituindo mais um instrumento de política monetária à disposição do governo.

Com a edição do Plano Collor II e a conseqüente criação do Fundo de Aplicação Financeira, após o dia 1° de março de 1991, passamos a ter duas tabelas de IOF vigindo no mercado financeiro. Uma incide sobre o valor de resgate de cotas de Fundo de Aplicação Financeira ou de Fundo de Investimento em cotas de Fundo de Aplicação Financeira, com prazo inferior a dezesseis dias úteis. A outra tabela incide sobre as demais operações com prazo inferior a onze dias úteis, entre as quais:

- Todas as operações financeiras cujo resgate ou cessão ocorra no prazo de onze dias úteis.
- Aplicações finais em títulos de renda fixa com prazo de até onze dias úteis.
- Operações de financiamento realizadas nos mercados a termo e futuro em bolsa de valores e de mercadorias que envolvam venda coberta, com garantia, antes da liquidação ou vencimento, e não tenham previsão de ajustes diários de posições.
- Conta margem — financiamento para os clientes comprarem ações.

O prazo de onze dias úteis visa deixar fora do imposto os Bônus do Banco Central (BBC), quatorze dias corridos.

I O F (I)

ALÍQUOTAS SOBRE O VALOR DE RESGATE DE COTAS DE FUNDO DE APLICAÇÃO FINANCEIRA OU DE FUNDO DE INVESTIMENTOS EM COTAS DE FUNDOS DE APLICAÇÃO FINANCEIRA

Número de dias úteis da aplicação	Alíquota % (1)	Limite % (2)
0	0,6213	45,00
1	0,6213	45,00
2	1,1566	42,18
3	1,6074	39,35
4	1,9746	36,50
5	2,2593	33,64
6	2,4621	30,76
7	2,5836	27,86
8	2,6241	24,93
9	2,5836	21,97
10	2,4621	18,97
11	2,2593	15,93
12	1,9746	12,85
13	1,6074	9,72
14	1,1566	6,54
15	0,6213	3,30
16	0,0000	0,00

OBSERVAÇÕES:

(1) - ALÍQUOTA APLICÁVEL SOBRE O VALOR DE RESGATE

(2) - LIMITE, EM PORCENTAGEM, DO VALOR DO IMPOSTO EM RELAÇÃO AO VALOR DO RENDIMENTO BRUTO DA OPERAÇÃO

I O F (II)

ALÍQUOTAS SOBRE AS DEMAIS OPERAÇÕES

Número de dias úteis da operação	Alíquota % (1)	LIMITE % (2)
0	1,3807	100,00
1	1,3807	100,00
2	2,4690	90,04
3	3,2784	80,25
4	3,8142	70,51
5	4,0811	60,77
6	4,0811	50,99
7	3,8142	41,13
8	3,2784	31,15
9	2,4690	20,99
10	1,3793	10,63
11	0,0000	00,00

OBSERVAÇÕES:

(1) - ALÍQUOTA APLICÁVEL SOBRE O VALOR DA OPERAÇÃO

(2) - LIMITE, EM PORCENTAGEM, DO VALOR DO IMPOSTO EM RELAÇÃO AO VALOR DO RENDIMENTO BRUTO DA OPERAÇÃO

8.3 Open market

O Open market ou mercado aberto é denominado assim por não ter fronteiras físicas, sendo uma de suas principais características a alta flexibilidade e rapidez nas operações. Nele são realizadas operações envolvendo títulos públicos (Letras do Tesouro Nacional — LTN's, Bônus do Banco Central — BBC's, Notas do Tesouro Nacional — NTN's) e privados (Certificados de Depósito Bancário — CDB's, Recibos de Depósito Bancário — RDB's).

Podemos dividi-lo em:

- **Mercado primário** — Caracterizado pelas operações de colocação dos títulos públicos emitidos, cujos participantes são instituições financeiras previamente selecionadas (*Dealers*), podendo ser bancárias e não bancárias. A instituição responsável pela colocação dos títulos é o Banco Central (BACEN).

- **Mercado secundário** — Caracterizado pelas operações de compra e venda de títulos entre as instituições financeiras e seus clientes ou entre as próprias instituições. É onde assegura-se a liquidez aos títulos.

No mercado aberto, os títulos podem ser vendidos em definitivo ou com compromisso de recompra, e a diferença entre os preços de compra e venda, que é o ganho obtido pelas instituições financeiras, é denominado spread.

As operações de mercado aberto são um dos instrumentos de política monetária à disposição das autoridades econômicas para o controle, embora limitado, da liquidez geral e das taxas de juros do sistema.

8.3.1 Cálculo da rentabilidade dos títulos da dívida pública (BBC's, LTN's, LFT's)

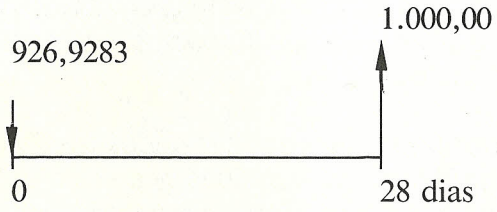
O Bônus do Banco Central (BBC) veio substituir a Letra do Tesouro Nacional (LTN). Esta fora criada há mais de vinte anos pelo Banco Central, em 1970, para servir como um instrumento

para administrar a política monetária. A partir de 1986 foi criada a Letra do Banco Central (LBC), que posteriormente foi substituída pela Letra Financeira do Tesouro (LFT), para ser usada com a mesma finalidade. As LTNs voltaram a partir de maio de 1990, com a nova equipe econômica e a renovada esperança de uma inflação estável e baixa.

As instituições financeiras compram esse papel com diversos prazos, sete, quatorze, 21 e 28 dias, para usá-lo como lastro dos Depósitos Especiais Remunerados (DER's), bem como para compor as carteiras dos diversos fundos. Até o Plano Collor II eram usados para lastro das operações de overnight.

Os títulos possuem um determinado valor nominal ou de face e são comprados com um deságio que lhes determina a rentabilidade.

Vamos usar um exemplo para mostrar como se determina a rentabilidade desses títulos. Suponhamos um BBC com valor nominal de Cr$ 1.000,00 e prazo de 28 dias, o qual foi comprado por Cr$ 926,9283. O diagrama de fluxo de caixa da operação seria o seguinte:



Lembrando a fórmula (5) do capítulo 5, que nos fornece a taxa efetiva, temos:

$$ie = \frac{S}{P} - 1$$

$$ie = \frac{1.000,00}{926,9283} - 1 = 0,0788$$

A taxa efetiva para o período de 28 dias é, logo, de 7,88%. Considerando o número de dias úteis que temos nos 28 dias corridos, podemos obter a taxa efetiva por dia útil. Supondo que existam dezenove dias úteis, neste exemplo, aplicando a fórmula (1) do capítulo 4, que permite calcular taxas equivalentes, temos:

$$id = (1 + i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$id = (1 + 0,0788)^{\frac{1}{19}} - 1 = 0,004$$

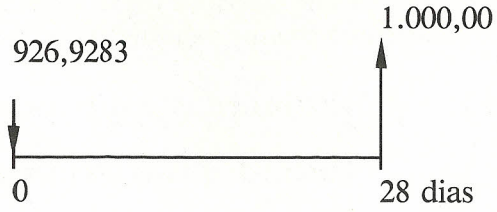
A taxa efetiva por dia útil é de 0,40%, e, partir dela podemos obter a taxa nominal para trinta dias ou taxa ao mês por dia útil.

$$ia.m.d.u. = 0,40 \times 30 = 12,00\%$$

Essa taxa linear ou nominal de trinta dias é importante, pois permite determinar o máximo que a instituição financeira poderá pagar por dia útil para financiar esse BBC sem ter prejuízo. Pagando abaixo de 12,00% a.m., ela obterá um ganho com a operação, mas quanto mais pagar acima dos 12,00% a.m. por dia útil, maior será o prejuízo.

8.3.2 Cálculo da rentabilidade dos BBCs com auxílio da rotina financeira da HP12C

Partindo do fluxo de caixa da operação, vamos mostrar uma maneira de determinar a taxa efetiva da operação e a taxa efetiva por dia.



É importante lembrar que sempre devemos introduzir, na tecla n, a relação:

$$n = \frac{\text{período da operação}}{\text{período da taxa desejada}}$$

• Determinação da taxa efetiva da operação

Neste caso, temos:

$$n = \frac{28}{28} = 1$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
926,9283	**CHS PV**	Introduz o valor total com sinal de fluxo de caixa
1.000,00	**FV**	Introduz o montante
1	**n**	Introduz o período
i	⟶	7,8832%. Taxa efetiva da operação

• Determinação da taxa efetiva por dia útil

Para obter a taxa efetiva por dia útil, basta introduzir a relação correta na tecla n, pois a máquina possui memória contínua.

19	**ENTER**	Número de dias úteis da operação
1	÷	Número de dias da taxa desejada

n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	0,4. Valor percentual da taxa efetiva por dia útil

Uma vez obtida a taxa por dia útil, para obter a taxa nominal ao mês basta multiplicar aquela por trinta.

30	**x** ⟶	12,00. Taxa nominal ao mês por dia útil

8.4 Títulos de renda fixa

São chamados títulos de renda fixa todos os títulos, públicos ou privados, com rendimentos finais e periódicos, estabelecidos por regras pré-determinadas, sendo o prazo mínimo permitido de:

- Pré-fixados - 30 dias
- Pós-fixados - 90 dias

Os títulos pré-fixados são assim denominados por terem o valor do rendimento bruto estabelecido no ato de sua emissão. Os pós-fixados levam esse nome por terem o valor do rendimento determinado quando do seu recebimento. São os títulos que rendem um determinado índice, mais juros. O índice usado nos últimos anos foi a correção monetária, mas a partir do Plano Collor II a TR passou a vigorar, para operações até 360 dias, podendo ser usado qualquer outro índice (IGP-M, IPC, etc.), para operações com prazo superior.

A partir das mudanças introduzidas pelo Plano Collor I somente existem, no mercado financeiro, títulos nominativos, sendo proibida a emissão de títulos ao portador.

Vamos, inicialmente, ver as características destes títulos, para depois determinar sua modalidade de cálculo.

• **Certificado de Depósito Bancário — CDB**

Título emitido pelos bancos comerciais, de investimento e de desenvolvimento para captação de recursos. Trata-se de depósito a prazo fixo por trinta ou mais dias, podendo ser transferível mediante endosso e tendo rendimentos pré ou pós-fixados. Para este último caso, o prazo mínimo de aplicação é de noventa dias.

• **Recibo de Depósito Bancário — RDB**

Título emitido pelos bancos comerciais e de investimentos para captação de recursos. Depósito a prazo fixo por trinta ou mais dias, sendo nominal e intransferível e podendo ter rendimentos pré ou pós-fixados. Para ter rendimentos pós-fixados, o prazo mínimo de aplicação é de noventa dias.

• **Letra de Câmbio — LC**

Título emitido pelas financeiras para captação de recursos. Depósito a prazo fixo por trinta ou mais dias, podendo ser transferível e com rendimentos pré ou pós-fixados. Neste último caso, o prazo mínimo de aplicação é de noventa dias.

• **Alíquotas de tributação sobre os títulos de renda fixa**

Apresentamos, a seguir, as alíquotas vigentes para os títulos de renda fixa, lembrando que elas incidem sobre o ganho além da variação da Unidade Fiscal de Referência (UFIR) entre as datas de aplicação e resgate. Sobre o imposto federal incide uma alíquota adicional de 5,00% de imposto estadual.

ALÍQUOTAS DE TRIBUTAÇÃO DOS TÍTULOS DE RENDA FIXA

TIPO DE OPERAÇÃO	IMPOSTO FEDERAL (IR)	ADICIONAL DE IMPOSTO ESTADUAL (AIRE)	ALÍQUOTA TOTAL (IR + AIRE)
Operação iniciada e encerrada no mesmo dia (*day trade*).	40,00%	2,00%	42,00%
Demais operações	30,00%	1,50%	31,50%

8.4.1 Cálculo do rendimento

8.4.1.1 Títulos pré-fixados

Os títulos com rendimentos pré-fixados podem ser emitidos a partir de trinta dias e são assim chamados por terem o valor do rendimento bruto estabelecido no ato de sua emissão.

Seja um título com as seguintes características:

- Valor da aplicação = Cr$ 500.000,00
- Taxa de rendimento = 400% a.a.
- Prazo - 32 dias = 24 dias úteis
- UFIR inicial = Cr$ 2.100,00
- UFIR final = Cr$ 2.372,69

Como em 32 dias corridos existem mais de onze dias úteis, não há incidência de IOF.

• **Cálculo da taxa bruta do período (32 dias) - irb**

Usando a fórmula (1) do capítulo 4, que se refere à equivalência de taxa, temos:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$id = (1 + 4{,}00)^{\frac{32}{360}} - 1 = 0{,}1538 \text{ ou } 15{,}38\%$$

A taxa bruta no período de 32 dias é irb = 15,38%, portanto.

• Cálculo da variação UFIR - △ UFIR

$$\triangle \text{ UFIR} = \frac{\text{UFIR final}}{\text{UFIR inicial}} - 1 = \frac{2.372{,}69}{2.100{,}00} - 1 = 0{,}1299$$

A variação da UFIR é de 12,99% no período.

• Cálculo do imposto a pagar - IR

Imposto a pagar = [(taxa bruta) - (variação da UFIR)] x alíquota do imposto (IR + AIRE)

De acordo com o quadro apresentado no item 8.4, a alíquota é 31,50%.

IR = (0,1538 - 0,1299) x 0,315 = 0,0075

• Cálculo da taxa de rendimento líquida - irl

irl = irb - imposto a pagar = 0,1538 - 0,0075 = 0,1463

• Cálculo do valor de resgate líquido - Sl

Sl = P (1 + irl)

Sl = 500.000,00 (1 + 0,1463) = 573.150,00

O valor de resgate do título é de Cr$ 573.150,00.

8.4.1.2 Títulos pós-fixados

O prazo mínimo para emissão dos títulos pós-fixados é de noventa dias, e estes são chamados assim por terem o valor dos rendimentos determinados quando do seu recebimento. O rendimento é variável, pois a aplicação vai render a TRD acumulado do período, mais uma determinada taxa de juros.

Seja um título com as seguintes características:

- Valor da aplicação = Cr$ 800.000,00
- Taxa de rendimento = TRD + 45% a.a.
- Prazo = 91 dias corridos, 62 dias úteis
- Variação da UFIR
- UFIR inicial = Cr$ 2.400,00
- UFIR final = Cr$ 3.218,88
- Variação da TR por dia útil = 0,50%

Como em 91 dias temos mais de onze dias úteis, não há incidência de IOF.

• Cálculo da variação da UFIR no período — △ UFIR

$$\text{UFIR} = \frac{\text{UFIR final}}{\text{UFIR inicial}} - 1 = \frac{3.218{,}88}{2.400{,}00} - 1 = 0{,}3412$$

A variação da UFIR no período é de 34,12%.

• Cálculo da variação acumulada da TRD - itrda

itrda = $(1 + 0{,}005)^{62} - 1 = 0{,}3624$ ou 36,24% no período

• Cálculo dos juros do período - ijb

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$ijb = (1 + 0{,}45)^{\frac{91}{360}} - 1 = 0{,}0985 \text{ ou } 9{,}85\% \text{ no período}$$

- **Cálculo do rendimento bruto do período - irb**

$$irb = (1 + itrda)\,(1 + ijb) - 1$$

$$irb = (1 + 0{,}3624)\,(1 + 0{,}0985) - 1 = 0{,}4966 \text{ ou } 49{,}66\% \text{ no período}$$

- **Cálculo do imposto a pagar - IR**

Imposto a pagar = [(taxa bruta) - (variação da UFIR)] x alíquota do imposto (IR + AIRE)

$$IR = (0{,}4966 - 0{,}3412) \times 0{,}315 = 0{,}049$$

- **Cálculo da taxa de rendimento líquido - irl**

$$irl = irb - IR = 0{,}4966 - 0{,}049 = 0{,}4476 \text{ no período}$$

- **Cálculo do valor de resgate líquido - Sl**

$$Sl = P\,(1 + irl)$$

$$Sl = 800.000{,}00\,(1 + 0{,}4476) = 1.158.080{,}00$$

O valor de resgate de um título com as características citadas é de Cr$ 1.158.080,20.

8.4.2 Incidência do IOF sobre CDB/RDB/LC

Todos os títulos emitidos sofrem incidência de IOF, se o prazo da operação é inferior a onze dias úteis. Para determinar a alíquota incidente deve ser levado em conta, portanto, o número de dias úteis dentro do prazo da operação.

Vejamos o exemplo de um CDB emitido no dia 3 de janeiro de 1992, negociado no dia 15 do mesmo mês com resgate final para o dia 3 do mês seguinte. O procedimento para o cálculo do IOF é o seguinte:

- Contar o prazo da operação desde a data de emissão (03.01.92) até a de negociação (15.01.92). Para tal, exclui-se a data do início da operação e inclui-se a data do final. Neste caso tem-se oito dias úteis, prazo menor que onze dias úteis, havendo, conseqüentemente, incidência de IOF. A alíquota de tributação é de 3,2784% sobre o valor da operação, limitado a 31,15% do rendimento bruto.

- Por outro lado, o "adquirente" do título, isto é, aquele que o recomprou, deve verificar quantos dias úteis restam até a data do resgate final para determinar se há ou não incidência de IOF. Entre a data da recompra (15.01.92) e a do resgate final (03.02.92), há treze dias úteis, prazo maior que dez dias úteis, não havendo, portanto, incidência de IOF.

8.5 Poupança

A poupança é uma modalidade de aplicação pós-fixada, rendendo, portanto, um determinado índice, mais juros. O índice usado, para a poupança, nos últimos anos, a correção monetária, foi introduzida em 1964 com o objetivo de retificar a perda do poder aquisitivo da moeda.

Com as modificações ocorridas do Plano Collor II, o índice em vigor é a Taxa Referencial de Juros (TR). A TR, que busca espelhar a taxa média de captação paga pelos bancos comerciais, tem uma variação por dia útil expressa através da Taxa Referencial Diária (TRD). A TRD capitalizada no número de dias úteis do mês é igual à TR e, quando acumulada num determinado período de tempo, passa a ser conhecida como Taxa Referencial Diária Acumulada (TRDA).

Vamos analisar inicialmente o caso da poupança e determinar um forma de obter sua taxa de rendimento. A partir de fevereiro de 1991, a poupança passou a render a TRDA entre as datas de aniversários mais juros de 0,5% ao mês, e, diferentemente do que ocorre com os títulos de renda fixa, inclui-se a variação da data do início e exclui-se a variação da data final. É bom esclarecer este aspecto, pois existe uma tendência natural a associar o rendimento como sendo de TR, mais juros de 0,5% ao mês, o que pode criar uma expectativa de rendimento frustrada no investidor. Somente obtêm esse rendimento as poupanças que vencem no primeiro dia útil, rendendo a TR do mês anterior mais juros de 0,5%. As demais podem obter rendimentos maiores ou menores, dependendo da TR e do número de dias úteis. De uma maneira geral, quanto maior o número de dias úteis entre as datas de aniversário, maior será o rendimento.

Para deduzir uma expressão que permita calcular ir, taxa de rendimento da poupança, vamos supor um poupador que possuía um principal P, no início de um mês no qual a taxa referencial de juros acumulada entre as datas de aniversário foi itrda.

Primeiro vamos repor ao principal o ganho com a taxa referencial diária acumulada e determinar o principal corrigido P':

$$P' = P\ (1 + itrda)$$

Depois, vamos aplicar os juros sobre o capital corrigido para obter o montante S:

$$\boxed{S = P'\ (1 + 0{,}005) = P\ (1 + itrda)\ (1 + 0{,}005)} \qquad (1)$$

A taxa de rentabilidade ir é tal que, aplicada sobre o mesmo principal, produz o mesmo montante final S:

$$\boxed{S = P\ (1 + ir)} \qquad (2)$$

Igualando as expressões (1) e (2), temos:

$$P\ (1 + ir) = P\ (1 + itrda)\ (1 + 0{,}005)$$

$$\boxed{ir = (1 + itrda)\ (1 + 0{,}005) - 1} \qquad (3)$$

Exemplo 1

Em um determinado mês a TRDA entre as datas de aniversário de uma poupança foi de 28,70%. Qual o rendimento da poupança no referido mês?

Dados:

itrda = 28,70% mês
ir = (1 + 0,2870) (1 + 0,005) - 1 = 0,2934

A poupança rendeu 29,34% no referido mês.

Exemplo 2

Uma caderneta de poupança com aniversário no dia 7 tem 21 dias úteis entre suas datas de aniversário. Os primeiros dezesseis dias úteis tiveram uma TRD de 0,408733%, e os últimos cinco dias úteis tiveram uma TRD de 0,431818%. Calcular a rentabilidade obtida pelo investidor.

- Cálculo da TRDA entre as datas de aniversário

$$itrda = (1 + 0,\ 00408733)^{16}\ (1 + 0{,}00431818)^{5} - 1$$

itrda = 0,0906877 ou 9,06877% no período

- Cálculo da rentabilidade da poupança

ir = (1 + 0,0906877) (1 + 0,005) - 1 = 0,096141

A poupança rendeu 9,61% no referido mês.

8.6 Fundos mútuos

Os fundos mútuos surgiram como uma alternativa para permitir ao pequeno investidor o acesso às opções de investimento no mercado financeiro, pois sua rentabilidade é determinada em função da valorização da cota, e esta é valorizada ou desvalorizada em função do lastro da carteira, independentemente do número de cotas possuídas pelo investidor. As instituições financeiras logo viram neles uma excelente oportunidade de obter uma fonte de receita, sem os riscos inerentes às operações de crédito, mediante a cobrança de uma taxa de administração (geralmente 6,00% a.a.) sobre um patrimônio que cresce de forma exponencial. Além disso, as carteiras desses fundos permitem que instituições administradoras tenham mais uma fonte de captação de recursos com a colocação de seus títulos. Este aspecto da rentabilidade, aliado ao fato de nossas instituições financeiras terem, com a aceleração do espiral inflacionário e a instabilidade da ordem econômica, deslocado seu eixo de atuação para a prestação de serviços, em detrimento de sua atividade fim de intermediação de recursos, levou a proliferação dos fundos mútuos a tal ponto de cada instituição geralmente administrar várias modalidades.

Os fundos mútuos podem ser classificados em fundos de renda fixa e de renda variável.

8.6.1 Fundos de renda fixa

São assim chamados os fundos nos quais o valor da cota é sempre crescente, sendo sua carteira constituída basicamente por títulos de renda fixa (LTNs, BBCs, debêntures, CDBs, etc.). Entre estes, podemos citar o fundo de aplicações financeiras (FAF), os de renda fixa propriamente ditos e o renda fixa DI.

8.6.1.1 Fundo de aplicações financeiras (FAF)

É um fundo de investimento sob regime de condomínio aberto, onde os recursos investidos são transformados em cotas que passam a ter rendimentos imediatos.

Sua principal característica é a liquidez ao investidor, por não existir carência. Um aspecto a ser ressaltado é que, após a edição do Plano Collor II, com o final do overnight, os fundos de aplicação financeira tornaram-se a única opção para quem precisa de liquidez.

Os fundos democratizam o acesso à rentabilidade no mercado financeiro, pois a valorização da cota é a mesma, independentemente do número de cotas possuído pelo investidor.

- **Composição da carteira**

A composição da carteira do FAF é a seguinte:

PERCENTUAL	TÍTULO	RENDIMENTO
2	Depósito à vista	0
3	Cotas do Fundo de Desenvolvimento Social	No máximo, TR
10	Títulos de Desenvolvimento Econômico vinculados a projetos credenciados no Programa de Fomento à Competitividade Industrial	TRD
43	Títulos federais (LFT, LBC, LTN, BBC)	Taxa de mercado dos títulos públicos
	Depósitos junto ao Bacen	TRD
42	Títulos privados (CDB, LC, Debêntures) e/ou títulos estaduais	Taxa de mercado dos títulos privados e/ou estaduais

Pela composição da carteira, pode-se inferir que a rentabilidade do FAF não tem um rendimento muito diferente da TR. É preciso salientar que a taxa de administração cobrada pelas institui-

ções financeiras nesta modalidade de fundo é maior, situando-se na casa dos 8,00% a.a.

• **Tributação**

Sobre a variação bruta diária da cota incide uma alíquota de 5,25% (5,00% de Ir federal + adicional de imposto estadual de 5,00% sobre o imposto de renda federal).

• **IOF**

O IOF incide sobre os valores de resgate dos cotistas com prazo inferior a dezesseis dias úteis, sendo utilizada a tabela I do item 8.2. Vamos mostrar, mediante um exemplo prático, como se calcula o IOF, supondo o caso de um aplicador que investiu no FAF numa aplicação com as seguintes características.

— Cota de entrada = 105,00
— Cota de saída = 117,60
— Número de dias corridos = 9
— Número de dias úteis = 7
— Valor investido P = Cr$ 150.000,00

— **Número de cotas adquiridas - NC**

$$Nc = \frac{150.000,00}{105,00} = 1.428,5714$$

— **Valor bruto de resgate - Sb**

Sb = Nc x valor da cota de saída = 1428,5714 x 117,60
= 168.000,00

— **Cálculo do IOF**

IOF = @ x Sb

Sendo:

@ = Alíquota do IOF
Sb = Valor bruto do resgate

Como o número de dias úteis é sete, olhando na tabela I do item 8.2, temos:

@ = 2,5836 % = 0,025836

Neste caso:

IOF = 0,025836 x 168.000,00 = 4.340,45

Na tabela I existe um fator limitante, expresso em termos percentuais do rendimento bruto. Sua análise, a seguir, é:

Rendimento bruto = Sb - P = 168.000,00 - 150.000,00
= 18.000,00

$$\text{Limite percentual} = \frac{\text{Valor do IOF}}{\text{Rendimento bruto}} \times 100$$

$$= \frac{4340,45}{18.000,00} \times 100 = 24,11\%$$

Como neste caso 24,11 é menor que 27,86, limite máximo da tabela I, o valor do IOF é de Cr$ 4.340,45.
O valor do resgate líquido, Sl, obtido pelo investidor, é:

Sl = Sb - IOF = 168.000,00 - 4340,45 = Cr$ 163.659,55

8.6.1.2 Fundo de renda fixa

É um fundo de investimento sob a forma de condomínio aberto, onde os recursos são aplicados em títulos de renda fixa, públicos ou privados, com possibilidade de movimentação a cada 28 dias corridos. Isso significa que, em cada aplicação, a cota só é valorizada a cada 28 dias; ao mesmo tempo, esses fundos permitem ao aplicador, teoricamente, obter um rendimento maior que os de curto prazo, pois o administrador pode dispor dos recursos neles investidos por um prazo maior. Em tese, a perda de liquidez é compensada por uma maior rentabilidade.

- **Composição da carteira**

A composição da carteira é a seguinte:

— 10,00% no mínimo em títulos públicos (BBC, LFT, LTN, etc.)
— Debêntures
— CDBs, cotas do fundo de aplicação financeira, etc.

Do total das aplicações, apenas 40,00% devem estar em títulos pós-fixados.

— Para evitar concentração de risco no máximo 10,00% da carteira deve ser de títulos de mesma instituição financeira, sendo que da entidade administradora o máximo de papel permitido é de 30,00%.

- **Tributação**

A partir de 2 de janeiro de 1992, a tributação desses fundos passou a ser feita quando do resgate das cotas, e não mais sobre os títulos da carteira, como até então. A cota repassada para o investidor é bruta, ficando sujeita à incidência de imposto de renda na fonte a uma alíquota de 30,00% de imposto federal, mais 5,00% de adicional de imposto estadual, que incide sobre o federal, perfazendo uma alíquota total de 31,50% incidindo sobre a seguinte base de cálculo.

— Diferença positiva entre o valor de resgate e o valor de aquisição da cota, atualizado com base na variação acumulada da UFIR diária, desde a data da aplicação ou conversão em cotas até a data da reconversão das cotas em cruzeiros.

- **IOF**

Não há incidência de IOF, pois as valorizações da cota dão-se a cada 28 dias corridos.

8.6.1.3 Fundo de renda fixa - DI

É um fundo de investimento sob a forma de condomínio aberto, que busca refletir a realidade do mercado de Certificado de Depósito Interbancário (CDI) de um dia. Este reflete o custo do dinheiro entre as instituições financeiras, sendo uma opção interessante para acompanhar as oscilações das taxas de juros no curto prazo.

Trata-se de uma opção para pessoas que conhecem o mercado financeiro e têm uma boa idéia das variações de curto prazo do mesmo, principalmente quando há uma tendência de elevação do custo do dinheiro. Similarmente ao fundo de renda fixa, permite a movimentação com rentabilidade a cada 28 dias corridos e parte de seus recursos são aplicados no mercado futuro.

- **Composição da carteira**

As regras básicas de composição da carteira são as mesmas do fundo de renda fixa. Ressalta-se que uma parcela da mesma vai ser aplicada no mercado futuro, buscando refletir a variação do CDI.

- **Tributação e IOF**

Similares às do fundo de renda fixa.

8.6.2 Fundos de renda variável

São assim chamados os fundos nos quais a cota pode oscilar de acordo com os títulos e valores que compõem a carteira. Sua carteira é composta por títulos e valores de renda variável (ações, ouro, etc.), podendo a cota crescer ou decrescer de acordo com a evolução dos mesmos. Como exemplo, podemos citar o fundo de ações e o fundo ouro.

8.6.2.1 Fundo de ações

É um fundo de investimento constituído sob a forma de condomínio aberto, cujos recursos são aplicados em uma carteira diversificada de títulos e valores mobiliários, sendo esta composta principalmente por ações livremente negociáveis nas bolsas de valores.

O total do patrimônio líquido é representado por cotas calculadas diariamente com base nas cotações dos títulos que lastreiam a carteira.

Entre as vantagens de aplicar em fundos de ações em vez de individualmente, podemos citar o fato destes serem administrados pelos melhores profissionais do mercado, contando, em sua retaguarda, com departamentos técnicos para análise dos diversos setores da economia.

Um aspecto a destacar para o investidor é o de que, pela própria diversificação da carteira, quando há valorização nas bolsas, o investidor ganha na média, mas, em compensação, ao haver desvalorização, ele também perde na média.

É importante controlar a data de conversão dos recursos em cotas, para evitar perdas, tanto na aplicação quanto no resgate. Em geral, a aplicação em D é convertida com a cota de D + 1. O pedido de resgate em D é convertido com a cota de D + 1, estando disponível para o cotista em D + 2.

- **Composição da carteira**

A Comissão de Valores Imobiliários, conforme instrução CVM nº 148 de 3 de julho de 1991, estabeleceu os seguintes limites de diversificação da carteira.

— Diariamente, 51,00% do patrimônio líquido, no mínimo, devem estar alocados em ações, podendo o saldo remanescente ser alocado em fundo de aplicação financeira ou títulos de renda fixa, a critério do administrador.

— O total de aplicações em empresas de um mesmo grupo econômico não pode exceder 33,33% do patrimônio líquido do fundo.

— Deverá ser mantido, no mínimo, 5,00% do patrimônio líquido do fundo em ações ordinárias ou com direito a voto.

— O total de aplicação em uma única empresa não pode exceder 10,00% do capital votante ou 20,00% do capital total da empresa.

— O limite máximo para aplicação em uma única empresa deve obedecer às seguintes condições:

Participação no patrimônio líquido do fundo de ações ordinárias ou preferenciais com direito a voto	Máximo de ações de uma mesma empresa no patrimônio líquido do fundo
33,33%	33,33%
27,00%	25,00%
25,00%	20,00%
22,00%	17,00%
18,00%	14,00%
15,00%	12,00%
9,00%	11,00%
5,00%	10,00%

Antes da instrução CVM nº 148, a composição da carteira era a seguinte:

— 70,00% em títulos de renda variável em média
— 30,00% em títulos de renda fixa em média

As modificações realizadas permitem uma maior flexibilidade na locação dos recursos, dando melhores condições para o administrador reduzir o impacto das quedas do mercado de ações.

• **Tributação**

Com a edição da Medida Provisória nº 284, em 14 de dezembro de 1990, após 1º de janeiro de 1991 o rendimento real auferido no resgate de cotas de fundos de ações sofre incidência de imposto de renda federal na fonte à alíquota de 25,00%, mais adicional de imposto estadual de 5,00%, que incide sobre o imposto federal, perfazendo uma alíquota total de 26,25%.

É considerado ganho real a diferença positiva entre o valor de resgate da cota e o valor médio das aplicações, o qual foi atualizado monetariamente pela variação do BTN Fiscal, até 1º de fevereiro de 1991, pela TRD, a partir desta data até 31 de dezembro de 1991, passando, após, a ser feita pela Unidade Fiscal de Referência (UFIR).

A mesma medida provisória isentou, a partir de 1º de janeiro de 1991, a parcela de renda fixa da tributação de IR.

As aplicações anteriores a essa data têm seu valor médio apurado com base nos preços médios das ações negociadas em bolsa de valores no mês de dezembro de 1990.

Exemplo

Dados:

Aplicação em - 15/01/92
Resgate em - 09/07/92
Quantidade de cotas possuídas pelo aplicador - 200,00
Cota em 16/01/92 = 65,00
Cota em 10/07/91 = 261,50
UFIR inicial = Cr$ 1.100,00
UFIR final = Cr$ 2.310,00

1. Determinação da variação da UFIR — $\triangle$ UFIR

$$\triangle \text{UFIR} = \frac{\text{UFIR final}}{\text{UFIR inicial}} - 1 = \frac{2.310,00}{1.100,00} - 1 = 1,10$$

2. Determinação da Cota Corrigida — CC

Cota Inicial = CI = 65,00

$$CC = CI\ (1 + \triangle \text{UFIR}) = 65,00\ (1 + 1,1) = 136,50$$

3. Cálculo do imposto a pagar — IR

IR = [(Cota de resgate) - (cota corrigida)] x
x alíquota do imposto (IR + AIRE)

Alíquota do imposto = 0,2625

IR = (261,50 - 136,50) x 0,2625 = 32,81

4. Cota de resgate líquido - CRL

CRL = cota de resgate - IR

CRL = 261,50 - 32,81 = 228,69

5. Determinação do resgate líquido

NC = Número de cotas = 200,00
SL = Montante líquido = NC x CRL = 200,00 x 228,69
= 45.738,00

• **IOF**

Sobre as compras e vendas de ações não há incidência de IOF.

8.6.2.2 Fundo ouro

Em função do volume mínimo de ouro negociado em bolsa ser de 250 gramas, fator que dificulta o acesso do pequeno investidor a este mercado, as instituições financeiras criaram os fundos de investimento sob forma de condomínio, que permitem ao investidor que gosta do metal, investir a partir de um mínimo de 25 gramas, valor bem inferior ao mínimo do ouro bolsável. A rentabilidade é determinada em função da cotação do metal na entrada e na saída, sendo importante a data do crédito do resgate, para dar preferência a quem credita com maior liquidez.

• **Tributação**

As pessoas física e jurídica tributadas com base no lucro presumido têm uma alíquota de 25,00% de imposto de renda federal, mais um adicional de 5,00% de imposto de renda estadual, que incide sobre o federal, perfazendo uma alíquota total de 26,25%, incidindo sobre o ganho líquido auferido.

O imposto que incide sobre o ganho líquido pode ser pago, no caso de pessoas física e jurídica tributadas com base no lucro presumido, até o último dia útil do mês de março do ano subseqüente no qual é realizado o ativo, sendo convertido pela Unidade Fiscal de Referência (UFIR) da data da realização e reconvertido pela UFIR da data do pagamento. Considera-se ganho líquido o resultado positivo auferido, admitida a dedução dos custos e despesas efetivamente incorridos necessários a sua realização, que suplantar a variação do BTNF até 1° de fevereiro de 1991, da TRD a partir desta data até 31 de dezembro de 1991, e da UFIR, a partir dessa data.

A pessoa jurídica tributada com base no lucro real tem tributado o saldo dos lucros/prejuízos realizados durante o período base no balanço.

• **Taxa de custódia**

Os condôminos pagam à entidade custodiante do metal uma taxa de custódia em função do volume custodiado e do preço médio do metal, que varia de instituição para instituição, sendo em média de 3,00% ao ano, incidindo *pro-rata temporis*.

• **IOF**

Não há incidência de IOF sobre as operações com ouro.

8.7 Ouro

Ao longo dos tempos os investidores sempre tiveram um especial interesse em uma alternativa de investimento que os protegesse contra instabilidades, crises e incertezas. O investimento em ouro é muito apropriado para essas ocasiões, nas quais apresenta uma valorização muito grande.

Como um bom portfólio de aplicação deve ser diversificado, uma parte deve ser aplicada nesse tipo de ativo. Os europeus geralmente investem 30,00% de seu patrimônio em ouro.

A comercialização do ouro no Brasil é feita através de bolsas, fundidoras, e mesmo entre investidores. As bolsas que atuam no mercado são:

- BMSP - Bolsa de Mercadorias de São Paulo
- BMF - Bolsa Mercantil e de Futuros

As barras comercializadas em bolsa possuem 250 gramas (mínimo), e vêm sempre acompanhadas de um certificado garantindo

sua pureza e peso. Para serem comercializadas nas bolsas, devem estar obrigatoriamente custodiadas em um banco credenciado, e sua negociação ocorre através do certificado de custódia.

O ouro está muito atrelado ao mercado do dólar paralelo, e por isso a determinação de seu preço depende de uma série de variáveis, entre as quais a taxa de câmbio livre.

O valor da paridade do ouro, que é a base para a formação de seu preço interno, é dado pela fórmula:

PARIDADE = Preço internacional x Taxa de câmbio livre x 0,03215
(Cr$/g) (US$/OZ) (Cr$/US$) (OZ/g)

— OZ = Onça Troy - unidade de peso inglesa, 1 g = 0,003215 OZ

— Taxa de câmbio livre = taxa de câmbio oficial + Ágio

Essa fórmula pode ser desmembrada em outra, que nos fornece o preço efetivo do ouro:

PREÇO EFETIVO = Preço intern. x (tx. de câmbio of. + ágio) x 0,03215
(Cr$/g) (US$/OZ) (Cr$/US$) (OZ/g)

± variação sobre a paridade (Cr$/g)

Observe-se que a variação cambial, bem como a que ocorre sobre a paridade, são componentes importantes do preço desse metal.

8.7.1 Análise das variáveis

• Preço internacional

Variável típica de mercado que oscila em função da oferta e da procura em nível mundial.

• Taxa de câmbio oficial

Decidida pelo governo. Convém lembrar que uma correção cambial irrealista, abaixo da inflação real, inibe as exportações e estimula as importações, prejudicando a balança comercial do país.

É em função dessa variável que se diz, freqüentemente, que o ouro é protegido contra a inflação.

• Ágio do paralelo

Variável de mercado que oscila em função da oferta e procura da moeda americana no país. Os fatores que aumentam o ágio são:

— Aumento das importações ilegais
— Queda das taxas de juros
— Insegurança política, econômica ou social
— Suspeita de uma maxidesvalorização da moeda

E entre os que o diminuem estão:

— Aumento das exportações ilegais
— Aumento da taxa de juros

• Variação sobre a paridade

Variável do mercado interno do ouro. Os fatores que contribuem para fazer o preço aumentar em relação à paridade:

— Escassez de ouro no mercado interno
— Aumento da evasão de ouro no país
— Aumento das compras oficiais (Banco Central)

Em circunstâncias normais, essa variação não excede 3%.

8.7.2 Exemplo

Em um dado momento, as variáveis do mercado do ouro eram as seguintes:

— Preço internacional = US$ 408,80/OZ
— Taxa de câmbio oficial = Cr$ 82,50/US$
— Ágio = 15,00%

Sabendo que não existe variação sobre a paridade, calcular o preço efetivo do ouro.

Preço efetivo = Preço intern. x 0,03215 x (tx. de câmbio of. + ágio) ± Variação s/paridade

Preço efetivo = 408,80 x 0,3215 x (82,50 + 0,15 x 82,50)

Preço efetivo = Cr$ 1246,93

8.7.3 Taxa de custódia

Os investidores pagam à entidade custodiante uma taxa de custódia que é função do volume custodiado e do preço médio do metal. O valor da taxa varia de instituição para instituição, sendo em média de:

- 0,1% a.m. para volumes acima de 10kg.
- 0,2% a.m. para volumes inferiores a 10kg.

8.7.4 Tributação/IOF

A abordagem da tributação e do IOF é a mesma já descrita no item 8.6.2.2.

8.8 Cálculo da rentabilidade dos fundos

O cuidado que se deve ter ao aplicar nos fundos é o de controlar as cotas de entrada e de saída. Muitos deles, na hora do resgate, creditam o mesmo em D + 1, sendo D o dia da solicitação do resgate. Esse aspecto é importante, quando o gerenciamento da liquidez é vital.

No caso do fundo de ações, os resgates são creditados a partir de D + 2, até D + 5 dias úteis. Como o prazo de liquidação das operações em bolsa de valores é de D + 2 dias úteis, voltamos a ressaltar a importância de dar preferência aos fundos que creditam com maior liquidez, sem esquecer, é claro, da rentabilidade.

A rentabilidade é obtida através do cálculo da diferença percentual entre o valor final (cota da saída), VF, e o valor inicial (cota de entrada), VI.

A expressão matemática é a seguinte:

$$\triangle\% = \left(\frac{VF}{VI} - 1\right) \times 100 = \left(\frac{VF - VI}{VI}\right) \times 100$$

Observe que a calculadora HP12C possui a tecla $\triangle$ %, que permite calcular a diferença percentual entre dois valores.

Vamos, mediante um exemplo prático, esclarecer os conceitos anteriores:

Foi realizada uma aplicação no dia 1° de maio, em um fundo de aplicações financeiras, cuja cota naquela data era 710,1594. No dia 15 de julho, ela foi resgatada, sendo o resgate creditado no mesmo dia com a cota de 830,8865. Calcular:

a. A rentabilidade obtida pelo investidor.

b. A rentabilidade efetiva média mensal.

c. Sabendo que a TRD teve, do dia 1° de junho até o dia 15 de julho, uma variação de 0,004244 por dia útil, e considerando que existem 33 dias úteis no período, qual foi o ganho acima da TRDA obtido pelo investidor.

d. A taxa efetiva por dia útil.

a. Cálculo da rentabilidade

$$\triangle\% = \left[\frac{830,8865}{710,1594} - 1\right] \times 100 = 17,00\%$$

A rentabilidade é irt = 17,00% no período de 45 dias.

b. Cálculo da rentabilidade média mensal - i.am.

Lembrando a fórmula (1) do capítulo 4:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

Como o prazo da aplicação é de 45 dias, e queremos a taxa mensal ou de trinta dias:

$$ia.m = (1 + 0,17)^{\frac{30}{45}} - 1 = 0,1103$$

A taxa de rentabilidade efetiva média mensal é de 11,03%.

c. Cálculo da taxa de rendimento acima da TRDA - irr

— Cálculo da TRD acumulada no período - itrda

itrda $= (1 + 0,004244)^{33} - 1 = 0,15$

O valor da TRD acumulada no período é de 15,00%.

Lembrando a fórmula (13) do capítulo 4:

$$irr = \frac{(1 + irt)}{(1 + itrda)} - 1$$

$$irr = \frac{(1 + 0,17)}{(1 + 0,15)} - 1 = 0,0174$$

A taxa de rendimento acima da TRDA no período de 45 dias é irr = 1,74%

d. Cálculo da taxa efetiva por dia útil - iad

Usando novamente a fórmula (1) do capítulo 4:

$$iad = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$iad = (1 + 0,17)^{\frac{1}{33}} - 1 = 0,0048$$

A taxa efetiva por dia útil é iad = 0,48%.

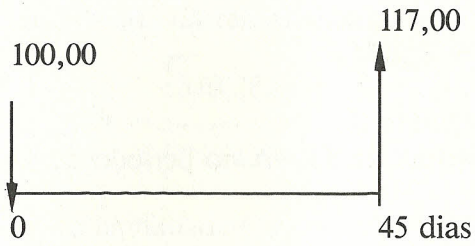
8.8.1 Resolução com auxílio da HP12C

a. Cálculo da rentabilidade

710,1594	**ENTER**	Introduz a cota inicial
830,8865	$\triangle$ % ⟶	17,00%. Valor da diferença percentual

b. Cálculo da rentabilidade média mensal - ia.m.

Montando o fluxo de caixa, temos:

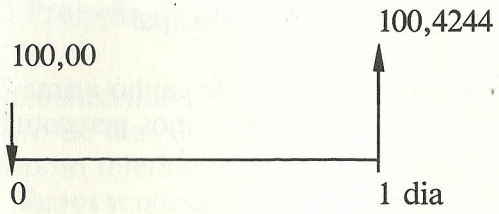


$$n = \frac{\text{Período de operação}}{\text{Período da taxa desejada}} = \frac{45}{30}$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
100,00	**CHS PV**	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
117,00	**FV**	Introduz o valor futuro
45	**ENTER**	Introduz o número de dias da operação
30	÷	Introduz o número de dias da taxa desejada e calcula a relação
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	11,03%. Taxa de rentabilidade média mensal

b. Cálculo da taxa referencial de juros acumulada - itrda

— TRD acumulada



$$n = \frac{\text{Período de operação}}{\text{Período da taxa desejada}} = \frac{1}{33}$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
100,00	**CHS PV**	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
100,4244	**FV**	Introduz o valor futuro
1	**ENTER**	Introduz o número de dias da operação
33	÷	Introduz o número de dias da taxa desejada e calcula a relação
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	15,00%. Variação da TRD acumulada no período de 45 dias

c. Cálculo da taxa de ganho acima da variação da TRDA

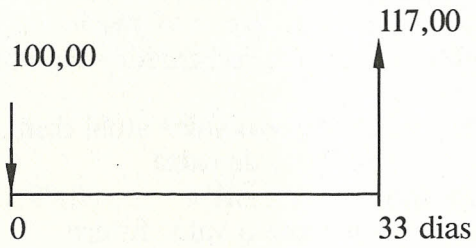
$$irr = \frac{(1 + irt)}{(1 + itrda)} - 1 = \frac{(1 + 0{,}17)}{(1 + 0{,}15)} - 1$$

1,17	**ENTER**	Introduz o numerador
1,15	÷	Introduz o denominador e calcula o quociente

1	-	Subtrai o principal
100	x ⟶	1,74. Taxa de ganho acima da TRDA em termos percentuais

d. Cálculo da taxa efetiva por dia útil - iad

Montando o fluxo de caixa, temos:



$$n = \frac{\text{Período de operação}}{\text{Período da taxa desejada}} = \frac{33}{1}$$

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
100,00	**CHS PV**	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
117,00	**FV**	Introduz o valor futuro
33	**ENTER**	Introduz o número de dias úteis da expressão
1	÷	Introduz o número de dias da taxa desejada e calcula a relação
n		Introduz a relação na tecla n
i	⟶	0,4769%. Valor da taxa efetiva por dia útil

8.8.2 Projeção da rentabilidade dos fundos

Conhecendo a variação da cota por dia útil de um fundo e o número de dias úteis do mês, pode-se projetar a rentabilidade do mesmo no referido mês.

Vamos supor um fundo cuja cota possui uma variação de 1,20% por dia útil num mês de 21 dias úteis. A rentabilidade projetada no mês, se a variação da cota se mantiver nesse patamar, poderá ser obtida usando-se a fórmula (1) do capítulo 4.

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1 + 0{,}012)^{\frac{21}{1}} - 1 = 0{,}2847 \text{ a.m.}$$

A rentabilidade projetada será de 28,47% no referido mês.

No caso em que já houver transcorrido um período e existir uma projeção por dia útil para o período restante, a rentabilidade no período global pode ser obtida mediante capitalização.

Seja o caso de um fundo cuja rentabilidade, nos primeiros quinze dias do mês, foi de 14,50%, e cuja cota projeta uma variação de 1,15% por dia útil para os onze dias úteis restantes do mês. Determinar a rentabilidade projetada no fundo no referido mês.

— Rentabilidade projetada dos quinze dias finais

$$ir2 = (1 + 0{,}0115)^{11} - 1 = 0{,}1340 \text{ ou } 13{,}40\%$$

— Rentabilidade projetada no período global

$$ir = (1 + ir1)(1 + ir2) - 1 = (1 + 0{,}1450)(1 + 0{,}1340) - 1$$
$$ir = 0{,}2984 \text{ a.m.}$$

A rentabilidade projetada no mês é de 29,84%.

8.9 Spread

O spread pode ser conceituado como o ganho obtido por determinado agente econômico numa operação.

As instituições financeiras, por exemplo, captam recursos dos poupadores a uma determinada taxa e os repassam aos tomadores a uma taxa maior. Essa diferença de taxa é conhecida como spread.

Observe que as taxas de empréstimo e captação devem estar referidas sempre no mesmo período.

Sejam:

icl = Taxa de empréstimo ou taxa de aplicação dos recursos no período
ica = Taxa de captação ou custo do recurso no período
sp = Spread

O montante S, obtido com a aplicação dos recursos a partir de um principal P, é:

$$S = P (1 + icl)$$

Para chegar ao montante S, podemos também proceder da seguinte maneira:

— Calcular o montante S1, obtido pela aplicação da taxa de captação ao principal P.

$$S1 = P (1 + ica)$$

— Aplicar ao montante S1 o spread, para chegar ao montante final S.

$$S = S1 (1 + sp) = P (1 + ica) (1 + sp)$$

Como os montantes devem ser iguais no final do período, e lembrando que partimos do mesmo principal P, temos:

$$P (1 + ica) (1 + sp) = P (1 + icl)$$

De onde obtemos:

$$1 + sp = \frac{(1 + icl)}{(1 + ica)}$$

$$\boxed{sp = \frac{(1 + icl)}{(1 + ica)} - 1} \qquad (4)$$

Exemplo:

Seja calcular o spread praticado por um banco que cobra uma taxa efetiva de 54,80% ao mês no seu cheque especial, sabendo que o custo de captação da mesma instituição é de 37,20% ao mês.

$$sp = \frac{(1 + icl)}{(1 + ica)} - 1$$

$$sp = \frac{(1 + 0{,}5480)}{(1 + 0{,}3720)} - 1 = 0{,}1283 \text{ a.m. ou } 12{,}83\% \text{ ao mês}$$

8.9.1 Custo para o cliente

O custo para o cliente é determinado pela colocação do spread desejado em cima do custo de captação, mas também é importante levar em conta todas as comissões, taxas e impostos cobrados pelas instituições financeiras, que elevam a taxa efetiva e muitas vezes passam desapercebidos.

A partir de (4) obtemos a fórmula para calcular o custo para o cliente:

$$icl = (1 + ica)(1 + sp) - 1 \quad (5)$$

Sendo:

icl = Taxa de empréstimo ou taxa de aplicação dos recursos no período
ica = Taxa de captação no período
sp = Spread

Mostraremos, mediante alguns exemplos, a influência das comissões, taxas e impostos no custo efetivo pago pelo cliente.

Exemplo:

Um banco que tem um custo de captação de 2.000,00% ao ano vai emprestar a uma empresa pelo período de trinta dias e deseja ganhar um spread de 4,00% no referido período. Determinar o custo para o cliente.

a. Custo de captação no período

Lembrando a fórmula (1) do capítulo 4, temos:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1 + 20{,}00)^{\frac{30}{360}} - 1 = 0{,}2888 \text{ a.m.}$$

O custo de captação é de 28,88% ao mês.

b. Determinação da taxa para o cliente

Usando a fórmula (2), temos:

$$icl = (1 + ica)(1 + sp) - 1 = (1 + 0{,}2888)(1 + 0{,}04) - 1 = 0{,}3404$$

A taxa para o cliente é de 34,04% ao mês.

8.9.2 PIS

O PIS é um imposto que incide sobre a receita bruta das instituições financeiras nas operações de empréstimo e financiamento a pessoas físicas e jurídicas com prazo inferior a trinta dias. Deve ser incluído na taxa depois da colocação do spread, já que este também gera receita para a instituição.

A alíquota atual é de 0,65%.

Exemplo:

Sabendo que o custo de captação de uma instituição financeira é de 34,04% ao mês, incluindo já o spread de 4,00% que a mesma quer ganhar no período, determinar a taxa mensal que essa instituição vai cobrar do seu cliente depois da incidência do PIS, realizando uma operação de empréstimo pelo período de vinte dias.

— Cálculo do custo de captação no período

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1 + 0{,}3404)^{\frac{20}{30}} - 1 = 0{,}2156$$ ou 21,56% no período de vinte dias.

— Cálculo da taxa de aplicação dos recursos no período

A taxa para o cliente deve ser tal que, após a incidência do imposto, fique líquido para o banco 21,56%, no período de vinte dias. A icl pode ser obtida pela seguinte relação:

$$ica = (1 - IR)\, icl$$

$$icl = \frac{ica}{(1 - IR)}$$

Sendo:

icl = Taxa de empréstimo ou de aplicação
ica = Taxa de captação
IR = Alíquota do imposto

Neste caso, temos:

ica = 21,56% para vinte dias;
IR — PIS = 0,65%

$$icl = \frac{0,2156}{(1 - 0,0065)} = 0,2170 \text{ ou } 21,70\% \text{ no período de vinte dias}$$

A taxa mensal a ser cobrada do cliente será:

$$i.a.m. = (1 + 0,2170)^{\frac{30}{20}} - 1 = 0,3426 \text{ ou } 34,26\% \text{ ao mês}$$

8.9.3 Taxas e comissões

As taxas e comissões cobradas pelas instituições financeiras impactam a taxa efetiva paga pelos clientes, aumentando-a, apesar de geralmente passarem desapercebidas por estes. Vamos, mediante um exemplo, mostrar sua influência na taxa efetiva da operação.

Exemplo 3

Um cliente tomou emprestados Cr$ 1.500.000,00 junto a uma instituição financeira pelo período de 37 dias a uma taxa de 34,97% ao mês. Se a instituição cobra uma taxa de abertura de crédito de 3,00% sobre o valor do empréstimo, determinar a taxa efetiva mensal realmente paga pelo cliente.

— Cálculo do montante - S

Lembrando da fórmula do montante no regime de juros compostos, temos:

$$S = P (1 + i)^n$$

$$S = 1.500.000,00 (1 + 0,3497)^{\frac{37}{30}} = Cr\$ 2.171.286,83$$

— Cálculo da taxa de abertura de crédito - T.A.

T.A. = 0,03 x 1.500.000,00 = Cr$ 45.000,00

— Valor recebido pelo cliente - P

P = 1.500.000,00 - T.A. = 1.500.000,00 - 45.000,00
P = Cr$ 1.455.000,00

— Cálculo da taxa efetiva no período - ie

Lembrando da fórmula (5) do capítulo 5, que nos fornece a taxa efetiva temos:

$$ie = \frac{S}{P} - 1$$

$$ie = \frac{2.171.286,83}{1.455.000,00} - 1 = 0,4923 \text{ p/37 dias}$$

A taxa efetiva no período de 37 dias é 49,23%.

— Cálculo da taxa efetiva mensal - i.a.m.

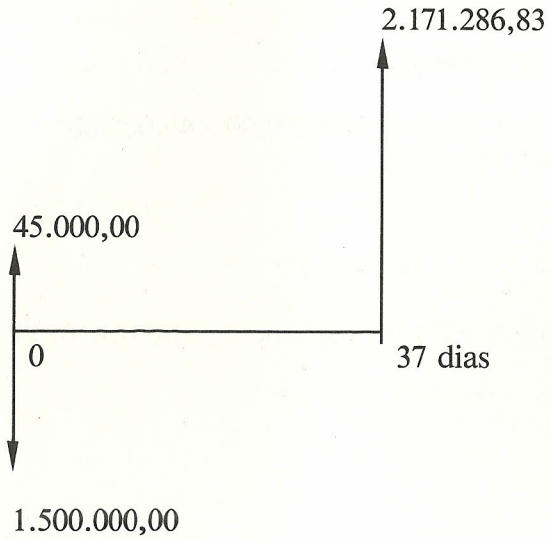
Lembrando da fórmula (1) do capítulo 4, temos:

$$id = (1 + ic)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$ia.m = (1 + 0{,}4923)^{\frac{30}{37}} - 1 = 0{,}3835 \text{ ou } 38{,}35\% \text{ a.m.}$$

Como podemos observar, uma taxa de 3,0% eleva a taxa efetiva mensal da operação de 34,97% para 38,35%.

O diagrama de fluxo de caixa da operação é o seguinte:



• **Cálculo com auxílio da HP12C**

Na HP12C a seqüência de cálculo será a seguinte:

a. Cálculo do montante

f	**CLEAR FIN**	Limpa os registradores financeiros
37	**ENTER**	Número de dias da operação
30	÷	Introduz o número de dias da taxa e calcula a relação
n		Introduz o período
34,97	**i**	Introduz a taxa
1.500.000,00	**CHS PV**	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
FV	→	2.171.286,83. Montante

b. Cálculo da taxa de abertura de crédito e do principal

1.500.000,00	**ENTER**	Introduz o valor do empréstimo
3	% →	45.000,00. Valor da taxa de abertura de crédito
-	→	1.455.000,00. Valor do principal

c. Cálculo da taxa efetiva mensal

	CHS PV	Introduz o valor atual com sinal de fluxo de caixa
i	→	38,34. Valor da taxa efetiva mensal

8.10 Risco de descasamento

É importante, para uma administração eficaz dos resultados das instituições financeiras, que as operações de captação e empréstimo sejam casadas, isto é, que os prazos e os valores sejam iguais, existindo apenas a diferença de taxas.

Na prática, entretanto, é impossível casar todas as operações, existindo o chamado risco de descasamento, explicado a seguir com um exemplo.

Suponhamos uma captação de Cr$ 1.000,00 pelo prazo de 62 dias à taxa de 1.800,00% ao ano. Caso esses recursos fossem emprestados à taxa de 2.000,00% ao ano, pelo mesmo prazo, o lucro obtido poderia ser calculado da maneira a seguir exposta.

Lembrando a fórmula do montante no regime de juros compostos, temos:

$$S = P (1 + i)^n$$

— Custo de captação

$$S = 1.000,00 (1 + 18,00)^{\frac{62}{360}} = Cr\$ 1.660,47$$

— Receita do empréstimo ou aplicação

$$S = 1.000,00 (1 + 20,00)^{\frac{62}{360}} = Cr\$ 1.689,33$$

Lucro = aplicação - captação = 1.689,33 - 1.660,47 = Cr$ 28,86

Suponhamos, agora, que a aplicação ou empréstimo fosse feito por um período maior que o da captação, 128 dias, por exemplo. Neste caso, uma captação pelo período adicional de 66 dias se faz necessária. Nesse período adicional verifica-se, porém, risco de uma variação nas taxas de captação. Existem três possibilidades:

a. Aumento nas taxas de captação
b. Manutenção das taxas de captação
c. Decréscimo nas taxas de captação

a. Aumento nas taxas de captação

Vamos supor que o valor de resgate da primeira captação teve de ser captado a uma taxa de 2.500,00% a.a.

— Primeira captação

$$S1 = 1.000,00 (1 + 18,00)^{\frac{62}{360}} = Cr\$ 1.660,47$$

— Segunda captação

$$S2 = S1 (1 + 25,00)^{\frac{66}{360}}$$

$$S = 1.660,47 (1 + 25,00)^{\frac{66}{360}} = Cr\$ 3.017,47$$

— Empréstimo

$$S = 1.000,00 (1 + 20,00)^{\frac{128}{360}} = Cr\$ 2.952,04$$

Neste caso, houve prejuízo, devido à elevação das taxas no segundo período:

Prejuízo = captação - aplicação = 3.017,47 - 2.952,04 = Cr$ 65,43

b. Manutenção das taxas de captação

Aqui a taxa de captação permanece em 1.800,00% a.a. nos

66 dias finais.

— Primeira captação

$$S1 = 1.000,00\ (1 + 18,00)^{\frac{62}{360}} = Cr\$\ 1.660,47$$

— Segunda captação

$$S = S1\ (1 + 18,00)^{\frac{66}{360}}$$

$$S = 1.660,47\ (1 + 18,00)^{\frac{66}{360}} = Cr\$\ 2.848,85$$

— Empréstimo

$$S = 1.00,00\ (1 + 20,00)^{\frac{128}{360}} = Cr\$\ 2.952,04$$

Lucro = aplicação - captação = 2.952,04 - 2.848,84 = Cr$ 103,20

c. Decréscimo nas taxas de captação

No segundo período, a taxa de captação decresce para 1.500,00% a.a.

— Primeira captação

$$S = 1.000,00\ (1 + 18,00)^{\frac{62}{360}} = Cr\$\ 1.660,47$$

— Segunda captação

$$S = S1\ (1 + 15)^{\frac{66}{360}}$$

$$S = 1.660,47\ (1 + 15,00)^{\frac{66}{360}} = Cr\$\ 2.760,49$$

— Empréstimo ou aplicação

$$S = 1.000,00\ (1 + 20,00)^{\frac{128}{360}} = Cr\$\ 2.952,04$$

Lucro = aplicação - captação = 2.952,04 - 2.760,49 = Cr$ 191,55

Pode-se ter uma idéia, através deste exemplo, do risco de descasamento e sua complexidade, pois ele tem embutida uma expectativa de taxa futura, o que não é seguro, num mercado oscilante como o nosso.

Em função das expectativas de taxa futura, as instituições financeiras podem adotar duas posturas:

- Taxas ascendentes: Captar a longo prazo e aplicar no curto prazo, para maximizar o retorno, através das aplicações a taxas mais elevadas.

- Taxas descendentes: Captar no curto prazo e aplicar a longo prazo, visando maximizar o retorno, através das captações mais baratas.

8.11 Comparação entre taxas de investimento

Muitas vezes, ao se comparar taxas efetivas ao ano, se não se leva em conta o número de dias úteis do período, pode-se estar incorrendo num erro.

Por exemplo, sejam um aplicador que investiu a 1.700,00 ao ano pelo período de 31 dias corridos, e outro que o fez a 1.690,00% a.a. pelo período de trinta dias corridos. Aparentemente, o primeiro investidor fez o melhor negócio, mas, na realidade, não foi isso o que aconteceu.

Supondo que nos 31 dias corridos existam 21 dias úteis, e que nos trinta dias corridos existam vinte dias úteis, vamos determinar a taxa efetiva no período e por dia útil, nos dois casos.

a. Taxa ao ano de 1.700,00% e período de 31 dias corridos

— Taxa efetiva no período com 21 dias úteis

Lembrando a fórmula (1) do capítulo 4, temos:

$$id = (1 + ie)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1 + 17{,}00)^{\frac{31}{360}} - 1 = 0{,}2826$$

A taxa é de 28,26% no período de 31 dias corridos.

— Taxa efetiva por dia útil

$$ia.d.u. = (1 + 0{,}2826)^{\frac{1}{21}} - 1 = 0{,}0119$$

A taxa efetiva é de 1,19% ao dia útil.

b. Taxa ao ano de 1.690,00% e período de trinta dias corridos e vinte dias úteis

— Taxa efetiva no período

$$ie = (1 + 16{,}90)^{\frac{30}{360}} - 1 = 0{,}2718$$

A taxa efetiva é de 27,18% no período de trinta dias.

— Taxa efetiva por dia útil

$$ia.d.u. = (1 + 0{,}2718)^{\frac{1}{20}} - 1 = 0{,}0121$$

A taxa efetiva é de 1,21% por dia útil.

O investidor que fez o melhor negócio foi, portanto, o que investiu a 1.690,00% ao ano pelo período de trinta dias corridos.

Geralmente, o mercado financeiro não trabalha com taxa efetiva ao dia, mas com a taxa ao mês por dia útil ou "taxa over", que nada mais é do que uma linearização dessas taxas efetivas ao dia para o mês.

Em nosso exemplo, teríamos:

a. 1,19 x 30 = 35,70% ao mês por dia útil

b. 1,21 x 30 = 36,30% ao mês por dia útil

Neste caso, não há problemas de se comprar duas taxas nominais, pois, na realidade, estamos comparando as taxas efetivas, já que para linearizar multiplicamos sempre a taxa efetiva pelo mesmo número (30), não havendo, portanto, contradição com os conceitos vertidos no capítulo 4.

8.12 Exercícios de fixação

1. Calcular a rentabilidade, em termos de taxa over, de uma LTN de sete dias com valor de resgate de Cr$ 1.000,00, comprada pelo preço de Cr$ 984,40, sabendo que no período existem cinco dias úteis.

Resposta: A taxa over é de 9,45% a.m.d.u.

2. Calcular a taxa efetiva da operação e o valor máximo que uma instituição financeira pode pagar no overnight para não ter

prejuízo na compra de uma LTN de 21 dias com valor de resgate de Cr$ 1.000,00, adquirida pelo preço de Cr$ 949,83, se no período existem quatorze dias úteis.

Resposta: A taxa efetiva é de 5,28% para 21 dias, e a taxa máxima de overnight é 11,05% a.m.d.u.

3. Calcular o valor líquido de resgate obtido por uma empresa que aplicou Cr$ 1.000.000,00 no fundo de aplicações financeiras, sabendo que a cota de entrada foi de 307,00; a de saída, de 315,00; e o número de dias úteis, cinco.

Resposta: O valor de resgate líquido é de Cr$ 1.017.292,51

4. Calcular o valor líquido de resgate de um CDB pré-fixado com as seguintes características:

- Valor da aplicação = Cr$ 800.000,00
- Taxa de rendimento = 600,00% a.a.
- Variação da UFIR de 0,58% por dia útil
- Prazo- 34 dias = 24 dias úteis

Resposta: O valor de resgate é de Cr$ 948.080,79

5. Calcular o valor líquido de resgate de um CDB pós-fixado com as seguintes características:

- Valor da aplicação = Cr$ 700.000,00
- Taxa de rendimento = TRD + 45,00% a.a.
- Prazo de 92 dias
- Variação da TRD de 53,75% nos primeiros 50 dias, e de 38,88%, nos 42 dias finais.
- UFIR inicial = Cr$ 2.820,36
- UFIR final = Cr$ 6.007,37

Resposta: O valor de resgate é de Cr$ 1.595.518,88

6. Uma letra de câmbio com valor de resgate bruto de Cr$ 920.000,00 é recomprada nove dias úteis antes do seu vencimento por um investidor que paga Cr$ 850.000,00 por ela. Calcular o valor do IOF pago pelo investidor.

Resposta: O valor do IOF é de Cr$ 14.693,00

7. Um investidor aplicou no fundo de aplicações financeiras pelo período de 37 dias. Sabendo-se que a cota de entrada foi de Cr$ 715,00, e que a de saída foi de Cr$ 822,25, calcular:

a. A rentabilidade obtida
b. A rentabilidade média mensal
c. O ganho acima da TRD (variação acumulada da TRD no período = 13,00%)

Resposta: a. 15,00% no período de 37 dias
b. 12,00% a.m.
c. 1,77% no período de 37 dias

8. Um investidor aplicou num fundo de ações pelo prazo de 62 dias. A cota de entrada foi de Cr$ 330,00, e a de saída, Cr$ 300,00. Calcular:

a. A perda obtida
b. A perda total, considerando que no período houve uma variação acumulada da TRD de 25,00%.

Resposta: a. A perda foi de 9,09% no período
b. A perda total foi de 36,36% no período

9. Calcular o preço efetivo do ouro, sabendo que, no final de um dado mês, as variáveis do mercado do ouro eram as seguintes:

- Preço internacional = US$ 468,80/OZ
- Ágio = 22,26%

- Taxa de câmbio oficial = Cr$ 55,62/US$
- Variação sobre paridade = 1,00%

Resposta: O preço efetivo foi de Cr$ 1.035,15

10. Sabendo que a cotação do ouro no mercado em 30 de setembro era de Cr$ 939,30 e que em 30 de outubro era de Cr$ 1.041,26, determinar:

a. Qual a rentabilidade do ouro no mês de outubro.
b. Qual a melhor opção de aplicação, se a rentabilidade líquida do fundo de aplicações financeiras por dia útil é de 0,50%, e o mês tem 23 dias úteis.

Resposta: a. A rentabilidade foi de 10,85 no mês de outubro
b. O fundo de aplicações financeiras foi a melhor opção.

11. Calcular o spread praticado por um banco que cobra uma taxa de 3.300,00% ao ano por um empréstimo de 35 dias, se seu custo de captação é de 36,00% para o referido período.

Resposta: O spread é de 3,60% para o referido período.

12. Um banco que tem um custo de captação de 3.500,00% ao ano deseja fazer um empréstimo a uma empresa por 32 dias, ganhando um spread de 5,00% no período. Determinar o custo para o cliente.

Resposta: O custo para o cliente é de 44,39% no período

13. Calcular o lucro ou prejuízo obtido por um banco que captou Cr$ 100.000,00 a uma taxa de 1.900,00% ao ano, por um período de 38 dias, e o emprestou, pelo mesmo período, a uma taxa efetiva de 34,00% ao mês.

Resposta: O lucro é de Cr$ 7.684,31

14. Indicar qual a melhor opção de investimento:

a. 1.800,00% ao ano, 32 dias corridos e 22 dias úteis
b. 1.795,00% ao ano, 30 dias corridos e 20 dias úteis

Resposta: A opção b., que fornece uma taxa de 36,99% ao mês por dia útil, é melhor do que a primeira, que oferece uma taxa de 35,90% ao mês por dia útil.

zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

APÊNDICE

Introdução ao uso da calculadora HP12C

1. Informações básicas

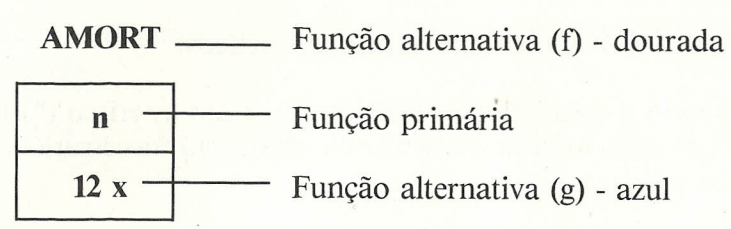
• Para iniciar as operações, pressiona-se a tecla ON, que serve, ao ser usada pela segunda vez, para desligar a máquina calculadora.

• A máquina desliga-se de forma automática, de oito a 17 minutos depois de sua última utilização.

• A maioria das teclas da HP12C possui duas ou até três funções.

— A função primária é indicada pelo caractere impresso em branco na face superior da tecla. As funções alternativas são indicadas pelos caracteres impressos em dourado acima da tecla, e os impressos em azul, na face oblíqua da tecla.

— As funções alternativas são acessadas pressionando-se a tecla de prefixo adequado antes de pressionar a tecla correspondente à função desejada.



• Ao se pressionar as teclas **f** ou **g**, o indicador de estado (anúncio) fica aceso no visor.

• Ao se introduzir um número na calculadora, cada grupo de três dígitos é automaticamente separado no visor. A tecla do ponto decimal deve ser pressionada para separar a parte inteira da decimal.

• A tecla **ENTER** é utilizada para separação de números e para indicar à máquina que um número acaba de ser introduzido.

• A tecla **CHS** (CHANGE SIGN) é usada para troca de sinal do número no visor.

• A tecla de prefixo **f**, seguida de um número de zero a nove, permite selecionar o número de casas decimais.

• A tecla **CLX** (CLEAR X) apaga o conteúdo do visor (registrador x).

• **f CLEAR FIN** apaga os registradores financeiros, que são as teclas **n**, **i**, **PV**, **PMT**, **FV**.

Sendo:

n = Período
i = Taxa de juros
PV = Principal
PMT = Pagamento periódico
FV = Montante

• **f CLEAR PREFIX**, pressionada após **f**, **g**, **RCL** ou **STO**, cancela estas teclas.

• +, -, x e ÷ são os operadores aritméticos.

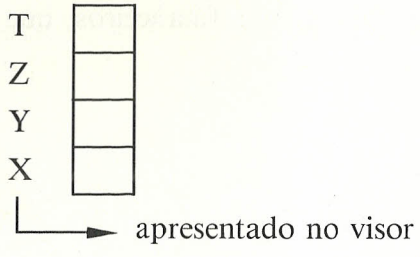
• Quando a calculadora estiver ligada, e um asterisco (*) ficar piscando no canto inferior esquerdo do visor, será necessário substituir as baterias.

• Para testar os circuitos de calculadora, basta pressionar **ON** simultaneamente com a tecla **x**; depois, soltar esta última. O visor apresenta a palavra **RUNNING** por cerca de vinte segundos, o que significa que os circuitos estão totalmente testados.

2. Pilha operacional

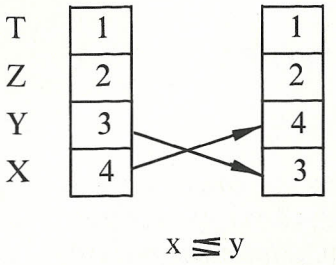
A HP12C possui quatro registradores especiais usados para armazenamento de números durante os cálculos. Para melhor entender seu funcionamento, eles devem ser visualizados em forma de pilha, um sobre o outro. São geralmente referidos como "registradores da pilha", ou coletivamente como a "a pilha operacional", designados por T, Z, Y e X.

A menos que a calculadora esteja no modo de programação, o número apresentado no visor é sempre o contido no registrador X.



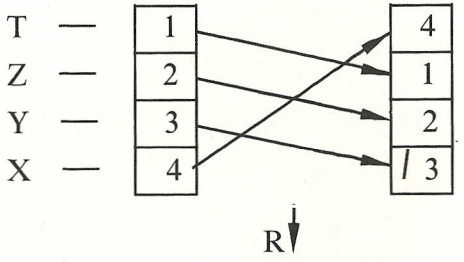
Ao se pressionar a tecla **ENTER**, o conteúdo do resgistrador X é copiado no registrador Y. Isso ocasiona o deslocamente da pilha operacional para cima. A calculadora fica sabendo que o conteúdo do registrador X está completo, ou seja, encerra a introdução de dígitos.

A tecla **x ≷ y**, ao ser pressionada, intercambia os conteúdos dos registradores x e y:

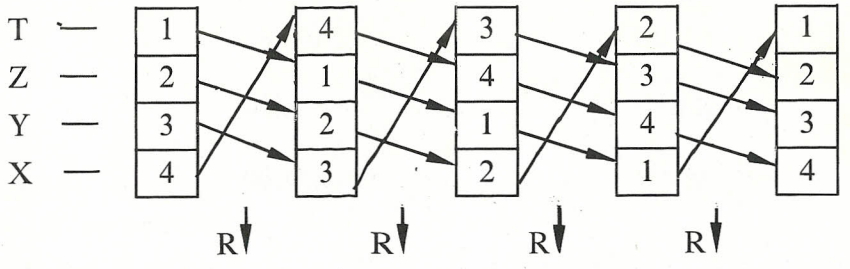


x ≷ y

Ao ser pressionada a tecla **R** (ROLL DOWN) o conteúdo da pilha operacional é copiado no registrador imediatamente inferior, e o conteúdo anterior do registrador X é copiado no registrador T:



Se **R** é pressionada quatro vezes consecutivas, o conteúdo dos registradores Y, Z, T e os números voltam a ocupar sua posição inicial:



Para efetuar uma operação matemática, os números devem estar posicionados nos registradores X e Y da maneira que seriam escritos verticalmente num papel: o número de cima seria o registrador Y, e o de baixo, registrador X.

12	12	12	12
x 2	÷ 2	+ 2	- 2

3. Cálculos em cadeia

A HP12C permite realizar cálculos em cadeia através da pilha operacional, sem necessidade de introdução de parênteses ou de armazenamento, em memória, dos resultados intermediários, como ocorre com outras calculadoras.

A única ocasião em que se deve pressionar a tecla ENTER para separar dois números é quando se está introduzindo, de forma consecutiva, um número imediatamente após o outro.

Exemplos:

1. 5.833,00 - 2.294,00 - 1.370,20 - 1.014,80 + 105.300,00 = = 106.454,00

Pressionar		Visor
5.833,00	ENTER	5.833,00
2.294,00	-	3.539,00
1.370,20	-	2.168,80
1.014,80	-	1.154,00
105.300,00	+	106.454,00

2. (5 x 6) + (7 x 8) = 86

Pressionar		Visor
5	ENTER	5
6	x	30
7	ENTER	7
8	x	56
+		86

3. $\left[\dfrac{(16 \div 4) - (12 \div 3) + 10}{(4 \times 4) - (4 \times 3) \div 2}\right] \sqrt{64} = 8{,}0$

Pressionar		Visor
16	ENTER	16,00
4	÷	4,00
12	ENTER	12,00
3	÷	4,00
-		0,00
10	+	10,00
4	ENTER	4,00
4	x	16,00

4	**ENTER**		4,00
3	**x**		12,00
2	÷		6,00
-			10,00
÷			1,00
64	g	$\sqrt{x}$	8,00
x			8,00

4. Registradores de armazenamento

Existem quatro registradores especiais da pilha operacional, e um outro chamado de **LAST X,** "último x", que é usado para armazenar o último número contido no visor antes da realização de uma operação.

Além destes acham-se disponíveis até vinte "registradores de dados" ou memórias para o armazenamento manual de números. São designados: R_0 a R_9 e $R._0$ a $R._9$. Sempre haverá no mínimo sete registradores financeiros reservados para esta finalidade.

Para armazenar um número contido no visor num registrador de armazenamento, os passos são:

a. Pressionar **STO** (STORE = armazenar)
b. Introduzir o número do registrador: de 0 a 9 ou .0 a .9

Para recuperar um número de um registrador ou memória de armazenamento os passos são:

a. Pressionar **RCL** (RECALL = recuperar)
b. Introduzir o número do registrador: de 0 a 9 ou .0 a .9

5. Aritmética com registradores de armazenamento

Para fazer uma operação com o número no visor e o contido num registrador de armazenamento, e armazenar o resultado no mesmo registrador sem afetar o número do visor, deve-se proceder da seguinte maneira:

a. Introduzir o número no visor
b. Pressionar **STO**
c. Pressionar +, -, x ou ÷
d. Introduzir o número do registrador

Novo conteúdo do registrador = conteúdo anterior [+ - x ÷] Conteúdo do visor

Essas operações só são possíveis com os registradores R_0 a R_4.

Exemplo:

Seja colocar o número 70,00 na memória 3 e multiplicá-lo por 6,00; dividir este resultado por 4,00; somar 100,00 a este número e verificar o resultado.

Pressionar		**Visor**
70,0O	**STO 3**	70,00
6,00	**STO x 3**	6,00
4,00	**STO ÷ 3**	4,00
100,00	**STO + 3**	100,00
RCL	3	205,00

O resultado é 205,00.

6. Funções de porcentagem

A HP12C possui três teclas para a solução de problemas de percentagem: %, △% e % T.

A tecla % permite calcular o montante correspondente à porcentagem de um número. Entende-se como porcentagem a razão cujo denominador é igual a 100.

$$\text{Ex: } 5{,}00\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Para o cálculo da porcentagem, os passos são:

a. Introduzir a base
b. Pressionar **ENTER**
c. Introduzir a porcentagem
d. Pressionar %

Por exemplo, para calcular 15,00% de 60:

60	**ENTER**	60
15	%	9

Se a base já está no visor, como resultado de um cálculo anterior, não é necessário pressionar ENTER, antes de introduzir a porcentagem.

• Montante líquido

Entende-se por montante líquido a base somada ou subtraída da porcentagem. Para chegar a ele, basta calcular a porcentagem e então pressionar + ou -.

Exemplo:

Seja um motociclo cujo preço de tabela é Cr$ 300.000,00, com desconto de 10,00%, mas tendo, ao mesmo tempo, um compulsório de 15,00%, sobre este valor, com o desconto incluído. Calcular o valor a ser pago.

Pressionar		**Visor**
300.000,00	**ENTER**	300.000,00
10	%	30.000,00
-		270.000,00
15	%	30.500,00
+		310.500,00

A tecla △ % permite calcular a diferença percentual de dois valores.

Fórmula:

$$\triangle\% = \left(\frac{VF}{VI} - 1\right) \times 100 = \left(\frac{VF - VI}{VI}\right) \times 100$$

VF = Valor final
VI = Valor inicial
△% = Diferença percentual

Exemplo:

O valor da UFIR de um determinado mês era de Cr$ 106,40. O valor da UFIR três meses depois era de Cr$ 251,56. Calcular a variação percentual.

Pressionar		Visor
106,40	ENTER	106,40
251,56	△ %	136,42

A UFIR três meses depois é 136,42% maior que a inicial.

• % T

A tecla % T permite determinar qual o percentual que um número apresenta sobre o outro.

Fórmula:

$$\%\ T = \frac{Vi}{\sum_{i=1}^{n} Vi}$$

Sendo:

% T = Percentual sobre o total
Vi = Valor i - ÉSIMO

$\sum_{i=1}^{n} Vi$ = Somatório de todos os valores

Exemplo:

Uma pessoa possui Cr$ 210.000,00 aplicados em CDB; Cr$ 150.000,00 aplicados em ações, e Cr$ 400.000,00 em fundo de renda fixa. Calcular quanto representa o total aplicado em CDB e o total aplicado em ações sobre o montante.

Pressionar		Visor
210.000,00	ENTER	210.000,00
150.000,00	+	360.000,00
400.000,00	+	760.000,00
210.000,00	% T	27,63
CLX		
150.000,00	% T	19,74

O valor aplicado em CDB representa 27,63% do total, enquanto o valor aplicado em ações representa 19,74% do total.

7. Funções de calendário (Tempo)

7.1 Formato da data

A calculadora apresenta dois formatos de datas possíveis:

• **DIA - MÊS - ANO**

Para usá-lo, basta pressionar **g D.MY**. Aparecerá, no visor, a indicação D.MY. Para introduzir a data coloca-se os dois dígitos do dia, pressiona-se a tecla do ponto decimal, introduzindo-se a seguir os dois dígitos do mês e os quatro do ano.

Exemplo:

Introduzir 16 de setembro de 1955.

Pressionar		Visor
16. 09 1955	**ENTER**	16,091955

• **MÊS - DIA - ANO**

Para usá-lo basta pressionar **g M.DY**. Quando a máquina está neste formato, não aparece nenhuma indicação no visor.

Exemplo:

Introduzir 16 de setembro de 1955.

Pressionar		Visor
09. 16 1955	**ENTER**	9,161955

Uma vez adotado um sistema, ele fica vigorando até que seja redefinido, ou até que a memória contínua seja completamente apagada.

7.2 Cálculo do número de dias entre datas

a. Introduzir a data mais antiga e pressionar **ENTER**.
b. Introduzir a data mais recente e pressionar **g △ DYS**.

Exemplo:

Calcular o número de dias entre 16 de setembro de 1955 e 31 de maio de 1987.

Pressionar		Visor
16. 09 1955	**ENTER**	16,09155
31. 05 1987	**g △ DYS**	11580,00

Esse número de dias é o real. Para se obter a resposta na base de um mês de trinta dias, basta pressionar a tecla x y. Pressionando-a novamente, volta-se à resposta original.

7.3 Cálculo de datas futuras e passadas

Para determinar a data e o dia, tendo decorrido um certo número de dias, a partir de uma determinada data, os passos são:

a. Introduzir a data fornecida e pressionar **ENTER**
b. Introduzir o número de dias
c. Se a data passada é passada, pressionar **CHS**
d. Pressionar **g DATE**

Os dígitos de dia, mês e ano são isolados por separadores de dígitos. O dígito da direita da resposta indica o dia da semana: 1, segunda-feira; 2, terça-feira, ... e 7 para domingo.

Exemplo:

Se foram aplicados Cr$ 10.000,00 no dia 31 de março de 1987 para vencer em 120 dias, qual a data de vencimento?

Pressionar		Visor
31. 03 1987	**ENTER**	31,031987
120	**g DATE**	29 07 1987 3

A data do vencimento é 29 de julho de 1987, uma quarta-feira.

Bibliografia

DE FARO, Clóvis. *Matemática financeira.* Rio de Janeiro, Apec, 1974.

PUCCINI, Abelardo de Lima. *Matemática financeira.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática financeira.* 2.ed. Rio de Janeiro, Atlas, 1982.

O autor

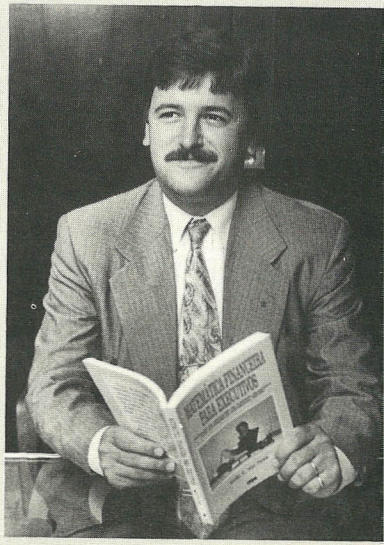
Emílio E. Volz Farias, 37 anos, natural de Montevidéu, Uruguai, é mestre em Engenharia Civil e especialista em Marketing pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Atualmente professor titular de Marketing na Universidade Paulista (UNIP), foi professor titular de Matemática Financeira e Marketing, nos cursos de pós-graduação em Administração Financeira e Marketing da Universidade Federal do Vale do Rio dos Sinos, em São Leopoldo (RS), e dos cursos de graduação e pós-graduação da Faculdade Feevale, em Novo Hamburgo (RS).

Com ampla experiência no mercado financeiro, onde é executivo há mais de dez anos, Emílio Farias trabalhou e ministrou cursos em instituições como Citibank e Lloyds Bank e hoje ocupa o cargo de gerente regional do Banco Francês e Brasileiro, em São Paulo.

Membro do Instituto Brasileiro de Executivos Financeiros, publica artigos em jornais e revistas de empresas sobre Marketing, Comunicação e Qualidade.

Emílio E. Volz Farias, atualment
gerente regional do Banco Fran
cês e Brasileiro em São Paulo, po
sui ampla experiência profissiona
no mercado financeiro, tendo m
nistrado cursos em instituições co
mo o Citibank, Lloyds Bank e Mu
tiplic. Desempenhou, igualmente
atividades docentes, em nível d
graduação e pós-graduação, junto
à Universi
dade do Vale do Rio dos Sino
(UNISINOS/RS)



BUREAU
ATENDIMENTO AO LEITOR

Sugestões, reclamações e informações, dirija-se à nossa Divisão de Marketing

Av. Júlio de Castilhos, 159
90030-131 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax (051) 225.3026